

SUL PARADOSSO DI ACHILLE E LA TARTARUGA

RENZO BELTRAME

Del paradosso di Achille e la tartaruga di Zenone sono state proposte molte spiegazioni e molti commenti. Qui mi propongo di ripercorrerlo con un taglio sui processi mentali messi in gioco, come è stile di *Methodologia Online*, lasciando in ombra le considerazioni logico-filosofiche sulla nozione di infinito a cui ha dato origine. Proprio perché la letteratura su questo paradosso è cospicua, ho utilizzato molto liberamente, nel senso di adattarli al tipo di considerazioni di questa nota, i risultati noti.

Vedremo che, per controllare se Achille raggiunge la tartaruga, Zenone propone uno schema di osservazioni in cui la singola osservazione ha il non raggiungimento come risultato logicamente obbligato. Con astuzia veramente notevole, viene poi proposta la ripetizione di questo controllo un numero di volte grande a piacere (che è il significato operativo di un numero infinito di volte) all'interno di uno schema recursivo che ha i caratteri del blow-up dell'intorno di un punto.

Il paradosso nasce perché la conclusione che Achille non raggiunge la tartaruga è vera all'interno dello schema di osservazioni proposto, ma non ha carattere generale. Essa va quindi riverificata quando si utilizza un diverso schema di osservazioni. E lo schema che usiamo abitualmente per gli oggetti in moto porta alla conclusione opposta, come tutti, Zenone compreso, sappiamo bene.

L'argomentazione di Zenone¹ è in breve la seguente.

Achille, assai più veloce della tartaruga, le concede il vantaggio di un certo tratto (lo indicheremo s_0). Quando Achille avrà percorso questo tratto, arrivando al punto in cui era partita la tartaruga, questa avrà percorso un certo altro tratto (s_1). Quando Achille avrà percorso questo tratto (s_1), la tartaruga avrà percorso un ulteriore tratto (s_2); e così via. Quindi Achille non raggiunge la tartaruga.

Zenone suppone nota la differenza di velocità tra Achille e la tartaruga, non dice esplicitamente che entrambi si muovono mantenendo costante la loro velocità; noi lo supporremo, ma solo per semplificare alcune deduzioni di carattere quantitativo che ci consentono di renderci conto di che cosa questo schema implica da un punto di vista quantitativo.

Mentre Achille percorre il tratto s_0 , la tartaruga percorre un tratto:

$$s_1 = \frac{s_0}{v_A} v_T = s_0 \frac{v_T}{v_A},$$

Date: Methodologia Online - Working Papers - WP172.

¹L'argomentazione di Zenone è riportata da Aristotele nel VI libro della *Fisica* (*Phys.* Z9, 239b14).

Su Zenone e il contesto dei presocratici un classico riferimento è Kirk G.S. and Raven J.E., *The presocratic philosophers*, Cambridge, 1957.

dove v_A e v_T sono rispettivamente la velocità di Achille e quella della tartaruga. Mentre Achille percorre il tratto s_1 , la tartaruga percorre un tratto:

$$s_2 = \frac{s_1}{v_A} v_T = s_1 \frac{v_T}{v_A} = s_0 \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^2 ;$$

e così via.

Lo schema delle osservazioni proposto da Zenone confina quindi le nostre osservazioni a ciò che succede in un tratto:

$$s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + \dots$$

Nell'ipotesi che Achille e la tartaruga si muovano a velocità costante abbiamo:

$$s = s_0 + s_0 \left(\frac{v_T}{v_A} \right) + s_0 \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^2 + s_0 \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^3 + \dots$$

Possiamo stimare questo tratto sulla base delle nostre attuali conoscenze matematiche. Se, come nel caso in questione, $(v_T/v_A) < 1$, poiché Achille è assai più veloce della tartaruga, questo tratto è limitato, ed ha come limite:

$$s \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}} s_0.$$

Se supponiamo che Achille corra 10000 volte più veloce della tartaruga, e che il tratto iniziale sia di 30 metri, lo schema proposto da Zenone confina le nostre osservazioni a ciò che succede in un tratto la cui lunghezza ha come limite:

$$s \rightarrow \frac{1}{1 - 0,0001} 30 = 30,003(0003) \text{ metri.}$$

quindi ad un tratto di poco più di 3 millimetri oltre il punto di partenza della tartaruga.

Il confinamento delle osservazioni ad un intervallo estremamente limitato al di là della prima osservazione è ancora più evidente se si considerano gli intervalli di tempo tra due successive osservazioni.

Il tratto iniziale s_0 è percorso da Achille nel tempo $t_0 = s_0/v_A$, il successivo tratto s_1 nel tempo $t_1 = s_1/v_A$, e così via. Lo schema di Zenone confina quindi le osservazioni in un tempo:

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots$$

che, nell'ipotesi che Achille e la tartaruga corrano a velocità costante, è dato da:

$$t = \frac{s_0}{v_A} + \left(\frac{v_T}{v_A} \right) \frac{s_0}{v_A} + \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^2 \frac{s_0}{v_A} + \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^3 \frac{s_0}{v_A} + \dots$$

quindi:

$$t = t_0 + t_0 \left(\frac{v_T}{v_A} \right) + t_0 \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^2 + t_0 \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^3 + \dots$$

e quindi entro un tempo limite:

$$t \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}} t_0.$$

Se supponiamo che Achille percorra 30 metri in 3 secondi (100 metri in 10 secondi), e che la tartaruga sia 10000 volte più lenta (che percorra cioè 1 millimetro al secondo), il tempo limite diventa:

$$t \rightarrow \frac{1}{1 - 0,0001} 3 = 3,0003(0003) \text{ secondi.}$$

Quindi lo schema di Zenone confina le osservazioni ad un intervallo di poco più di 0.3 millisecondi dopo la prima osservazione.

Se andiamo a calcolare, utilizzando le nostre nozioni di cinematica, dopo quanta parte del percorso Achille raggiunge la tartaruga, abbiamo:

$$\frac{s_0 + x}{v_A} = \frac{x}{v_T}$$

dove x è la distanza oltre il punto di partenza della tartaruga a cui Achille la raggiunge, e al solito si è supposto che Achille e la tartaruga mantengano costante la loro velocità.

Con alcune semplici manipolazioni algebriche² otteniamo:

$$s_0 + x = \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}} s_0$$

e ritroviamo l'ampiezza del tratto di percorso entro cui lo schema di Zenone confina le osservazioni.

Ne ricaviamo quindi che Achille non raggiunge la tartaruga nel tratto a cui lo schema di Zenone ha confinato le nostre osservazioni.

Passiamo ora all'elemento da cui scaturisce la conclusione che Achille non raggiunge la tartaruga. Tale elemento deve essere presente in ogni osservazione, perché ogni singola osservazione porta alla conclusione che Achille non raggiunge la tartaruga.

Zenone ci chiede di guardare nel momento in cui Achille raggiunge il posto che era occupato dalla tartaruga nell'osservazione precedente (alla prima osservazione dove questa era alla partenza della corsa). Chiaramente non vi troveremo la tartaruga, perché ogni corpo in movimento rettilineo non è a un dato momento nel punto in cui era in un momento precedente. Quindi non si può realizzare la condizione di trovare insieme nello stesso momento Achille e la tartaruga nel posto in cui Zenone ci chiede fare la nostra osservazione. E questo perché la nozione di movimento impone posti diversi in momenti successivi.

Lo schema di Zenone chiede poi di iterare osservazioni che hanno questa caratteristica, e quindi possiamo affermare a priori che tutte queste escludono la possibilità di trovarvi insieme Achille e la tartaruga, dal momento che tale impossibilità discende dal principio di non contraddizione.

La conclusione, inoltre, è indipendente da quanto la tartaruga è più lenta rispetto ad Achille, perché l'argomentazione non coinvolge aspetti quantitativi.

Nell'argomentazione di Zenone, la tartaruga è sempre un poco più avanti di Achille al momento di ogni osservazione, e questo porta alla conclusione che Achille non raggiunge la tartaruga.

Zenone deve però impedirci di prendere in esame l'ipotesi, immediata su base fenomenologica, del sorpasso. E lo fa montando lo schema dell'iterazione delineato in precedenza. Lo schema, infatti, prevede non soltanto un numero di osservazioni grande a piacere, ma anche l'impegno a continuare le osservazioni. Questo vincolo a non uscire dallo schema è a sua volta l'esca per la conclusione che Achille non

²Abbiamo:

$$s_0 + x = x \frac{v_A}{v_T} ; x = \frac{1}{\frac{v_A}{v_T} - 1} s_0$$

$$s_0 + x = s_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{v_A}{v_T} - 1} \right) = s_0 \frac{\frac{v_A}{v_T}}{\frac{v_A}{v_T} - 1} = s_0 \frac{1}{\frac{v_T}{v_A} \left(\frac{v_A}{v_T} - 1 \right)} = \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}} s_0$$

raggiunge mai la tartaruga. La conclusione è ovviamente vera solo all'interno della schema di osservazioni proposto da Zenone, ma siamo di fronte a un bel cavallo di Troia!

Il paradosso nasce infatti quando non si considera la dipendenza della conclusione dallo schema secondo cui sono condotte le osservazioni e si estende la conclusione a qualsiasi schema di osservazione, compreso quello di osservazioni separate da uno stesso intervallo di tempo.

Otteniamo, in particolare, che non possiamo dichiarare equivalenti due schemi di osservazione di un processo fisico sulla base del solo fatto che entrambi consentono un numero di osservazioni grande a piacere (oppure, come spesso sbrigativamente si dice, un numero infinito di osservazioni). Questo paradosso di Zenone ne è un inequivocabile controesempio.

La cosa non è strana, perché lo schema secondo cui sono condotte le osservazioni di un processo fisico è qualcosa di molto analogo al procedimento con cui si misura una grandezza fisica. In entrambi i casi le equivalenze richiedono prova.