

## Sui numeri reali<sup>1</sup>

*Renzo Beltrame*

La questione dei numeri reali ha una certa tradizione negli scritti della Scuola Operativa Italiana. Troviamo una definizione operativa di numero e delle operazioni aritmetiche in termini di categorie mentali sia in Ceccato che in Vaccarino, con differenze nella notazione e nella definizione delle operazioni aritmetiche, ma con l'identica conclusione che le definizioni proposte reggono fino a che ci si limita ai numeri interi e alle frazioni; in linguaggio matematico ai numeri razionali.

Vaccarino sostiene infatti che “sarebbe preferibile parlare invece che dei pretesi numeri  $e$ ,  $\pi$ , ecc. di procedimenti di *eizzazione*, di *pigrechizzazione*, ecc.”<sup>2</sup>.

D'altra parte, e come è noto, il problema di quelli che oggi vengono chiamati numeri reali ha una prima formulazione nella scuola Pitagorica, attraverso la constatazione che il rapporto tra lato e diagonale di un quadrato non è esprimibile come rapporto tra numeri interi; in termini moderni: non è esprimibile mediante un numero razionale.

Vale la pena richiamarne una dimostrazione, peraltro estremamente semplice.

Si può osservare che la diagonale di un quadrato può essere considerata anche come ipotenusa di un triangolo rettangolo con cateti uguali.

Applicando il teorema di Pitagora a tale triangolo, e assumendo come unità di misura la lunghezza di un cateto, che viene quindi ad avere misura 1, si ha:

$$1^2 + 1^2 = 2$$

e non esiste un numero intero il cui quadrato sia 2 (i quadrati dei numeri interi sono infatti 1, 4, 9, 16, ...), per cui il rapporto tra lunghezza del lato (cateto) e quella della diagonale (ipotenusa) non è esprimibile come rapporto tra due numeri interi.

È abbastanza immediato dimostrare che la conclusione è indipendente dalla scelta dell'unità di misura. Supponiamo infatti che la lunghezza del lato sia caratterizzata dal numero intero  $N$ . Per ipotesi deve essere un numero intero perché vogliamo provare se il rapporto tra la lunghezza del lato e quella della diagonale di un quadrato sia esprimibile come rapporto tra due numeri interi; e scegliendo  $N$  molto grande possiamo vedere se ha qualche effetto la scelta di un'unità di misura molto più piccola della lunghezza del lato. Si ha:

$$N^2 + N^2 = 2N^2$$

e ritroviamo un fattore 2, che deriva dalla somma e che impedisce di avere il quadrato della lunghezza della diagonale espresso come prodotto di quadrati di numeri interi; da cui la conclusione vista in precedenza.

Vale anche la conclusione inversa, quantunque la dimostrazione risulti un poco più laboriosa. Se si usa un'unità di misura con cui la lunghezza della diagonale è espressa da un numero intero, la lunghezza del lato non può venir espressa in generale da un numero intero di sottomultipli della medesima unità di misura.

Rammento soltanto che un'analogia conclusione vale per il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo raggio, mettendo in crisi una semplice definizione di misura di un angolo. Per definire

<sup>1</sup>Methodologia on line (<http://www.methodologia.it>) - Working Papers - WP 186 - Gennaio 2006

<sup>2</sup>Vaccarino G., *Prolegomeni*, Vol.I, p.237.

l'ampiezza di un angolo, è infatti ragionevole ed immediato pensare l'angolo come angolo al centro di un cerchio e definirne la misura come rapporto tra il raggio e la lunghezza dell'arco sotteso.

La misura della lunghezza di un segmento è di grande rilevanza in geometria, e il problema di lunghezze che non sono individuabili con numeri razionali diventava assai serio, a prescindere dalle implicazioni filosofico-religiose che esso aveva nella scuola pitagorica.

Abbiamo infatti dimostrato che non risulta possibile esprimere la lunghezza di tutti i segmenti di interesse per la geometria come un numero intero di sottomultipli della lunghezza di uno stesso segmento: quindi di un'unica unità di misura. E questo poneva il problema di trovare un modo di definire la misura della lunghezza di un segmento in modo che questa valga senza eccezioni per tutti i segmenti di interesse della geometria impiegando un'unica unità di misura.

La soluzione in uso che a me sembra preferibile<sup>3</sup> introduce un ulteriore schema categoriale. Si richiede infatti di costruire due successioni di numeri razionali con requisiti che vedremo immediatamente.

Per costruire una successione di numeri razionali occorre:

- a. considerare la sequenza dei numeri interi 1, 2, 3, 4, 5, .... come un ordinamento;
- b. stabilire una corrispondenza biunivoca tra ognuno degli elementi della successione e uno dei numeri interi; in tale schema, questi ultimi sono di solito detti indice dell'elemento nella successione.

Le due successioni debbono poi soddisfare i seguenti requisiti:

1. sono entrambe definite sull'insieme dei numeri interi e impiegano numeri razionali positivi<sup>4</sup>;
2. una deve avere termini tutti minori di quelli dell'altra;
3. la differenza tra i termini dello stesso ordine nelle due successioni deve sistematicamente diminuire man mano che si procede nelle sequenze<sup>5</sup>.

Và sottolineato che non è stabilito nella definizione il modo di costruire le due sequenze, ed effettivamente sono in uso modi diversi. Di conseguenza sono stati messi a punto criteri per dichiarare equivalenti sequenze costruite con metodi diversi.

Prima di proseguire con considerazioni di carattere metodologico su questo schema categoriale vale forse la pena vederne alcune applicazioni.

Propongo come primo esempio la costruzione delle due successioni per la radice quadrata di 2, scegliendo di procedere per decimali successivi.

Cerchiamo l'intero più grande il cui quadrato sia minore di 2: chiaramente 1. L'intero successivo, 2, ha quadrato maggiore di 2, appunto 4.

Passiamo ora ai decimali: 1,4 ha quadrato 1,96, quindi minore di 2; il successivo, 1,5, ha quadrato 2,25, quindi maggiore di 2; e così di seguito per i centesimi, i millesimi, ....

La tabella sottostante riporta i primi elementi delle sequenze di questi risultati: nelle righe centrali i valori scelti, nelle righe esterne i relativi quadrati

1	1,96	1,9881	1,999396	1,99996164	...
1	1,4	1,41	1,414	1,4142	...
2	1,5	1,42	1,415	1,4143	...
4	2.25	2,0164	2,002225	2,00024449	...

e le successioni delle due righe centrali sono assunte definire la radice quadrata di 2.

Questa entità non ha ovviamente una rappresentazione come numero decimale, o in altra base; si ricorre quindi ad un simbolo e sappiamo che una notazione in uso è  $\sqrt{2}$ .

<sup>3</sup>L'ho appresa durante il corso di Analisi I.

<sup>4</sup>I numeri reali negativi saranno ottenuti da questi impiegando le stesse convenzioni usate per i numeri interi.

<sup>5</sup>Tecnicamente si richiede che prefissato un valore per tale differenza si trovi un indice a partire dal quale la differenza tra gli elementi con lo stesso indice nelle due sequenze sia minore del valore prefissato.

I termini delle due sequenze nelle righe centrali sono anche detti approssimazioni successive, rispettivamente per difetto e per eccesso, di  $\sqrt{2}$ ; ma non intendo forzare questo aspetto anche se ha notevole rilevanza pratica.

Chiaramente, si possono utilizzare frazioni invece che decimali, e si ottiene:

1	49/25	19881/10000	1,999396	1,99996164	...
1	7/5	141/100	1,414	1,4142	...
2	3/2	71/50	1,415	1,4143	...
4	9/4	5041/2500	2,002225	2,00024449	...

dove ho limitato ai primi termini la più laboriosa rappresentazione mediante frazioni.

Nella tabella che segue è abbastanza immediato riconoscere un modo di definire la radice quadrata di 3, notata anche  $\sqrt{3}$ .

1	2,89	2,9929	2,999824	2,999824	...
1	1,7	1,73	1,732	1,7320	...
2	1,8	1,74	1,733	1,7321	...
4	3,24	3,0276	3,003289	3,00017041	...

Alla notazione  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  si fa' corrispondere la coppia di successioni:

1+1	1,4+1,7	1,41+1,73	1,414+1,732	...
2+2	1,5+1,8	1,42+1,74	1,415+1,733	...

La notazione  $2 + \sqrt{2}$ , definita dalle due successioni:

2+1	2+1,4	2+1,41	2+1,414	2+1,4142	...
2+2	2+1,5	2+1,42	2+1,415	2+1,4143	...

è una definizione del tutto ragionevole dell'aggiunta di 2 a  $\sqrt{2}$ , perché trasla di due unità tutto il procedimento visto per  $\sqrt{2}$ .

E analogamente per il prodotto  $3\sqrt{2}$ , a cui si fanno corrispondere:

9	17,64	17,8929	17,994564	...
$3 \times 1$	$3 \times 1,4$	$3 \times 1,41$	$3 \times 1,414$	...
$3 \times 2$	$3 \times 1,5$	$3 \times 1,42$	$3 \times 1,415$	...
36	20,25	18,1476	18,020025	...

e si vede anche che le due righe esterne, dei quadrati, convergono a 18, giustificando l'uguaglianza:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{2 \times 9} = \sqrt{18}$$

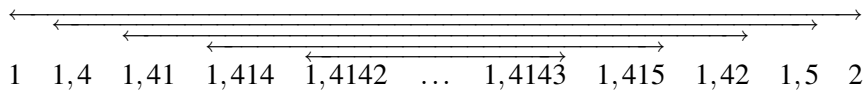
Potremmo continuare su questa linea e mostrare che le operazioni definite in aritmetica sui numeri interi e frazionari (i numeri razionali), possono venir definite tra queste nuove entità e tra esse e i numeri razionali in modo che sussistano le stesse proprietà che tali operazioni avevano quando gli operandi erano numeri razionali. In matematica, è invalso l'uso di chiamare questo procedimento estensione di operazioni ad un più vasto dominio di operandi.

Se utilizziamo la rappresentazione dei numeri decimali come ascisse su una semiretta, diventa immediatamente evidente una interessante proprietà dello schema categoriale introdotto.

Prendiamo le due sequenze con cui abbiamo definito  $\sqrt{2}$ :

1	1,4	1,41	1,414	1,4142	...
2	1,5	1,42	1,415	1,4143	...

Le coppie di valori corrispondenti nell'ordinamento delle due successioni



individuano segmenti sempre più corti che sono contenuti entro tutti gli analoghi segmenti definiti in precedenza.

Lo schema categoriale indicato può pertanto definire operativamente l'applicazione della categoria di convergenza al dominio dei numeri razionali<sup>6</sup>. E ciò che in matematica viene comunemente indicato numero reale viene allora ad essere definito da una convergenza nel dominio dei numeri razionali.

D'altra parte abbiamo visto che esiste un modo di estendere alle nuove entità le operazioni aritmetiche definite sui numeri interi e frazionari, e questa è considerata una buona ragione per chiamare numeri anche queste nuove entità, soprattutto perché sono possibili operandi misti. Ma ciò non autorizza ovviamente ad estendere l'analogia ad altri criteri o concettualizzazioni.

È del tutto ragionevole e corretto porre il problema di quando due delle convergenze definite in precedenza definiscano entità differenti oppure una stessa entità, siano cioè da questo punto di vista equivalenti. Ed inoltre, in analogia con quanto si fa sui numeri interi e frazionari, possiamo proporci di stabilire relazioni di maggiore e minore tra le nuove entità definite. Le dimostrazioni sono spesso non immediate. Qui accenno, come esempio, ad un criterio in base al quale è possibile affermare che un numero reale è maggiore di un altro. Da esso diventa immediatamente evidente un aspetto metodologico comune ai ragionamenti sui numeri reali.

Nel caso delle frazioni, e quindi dei numeri razionali, si era immediatamente ricondotti al caso dei numeri interi utilizzando l'equivalenza:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \equiv ad > cb$$

che integra e generalizza il procedimento di ispezione delle cifre che rappresentano i due numeri in una stessa base, tipicamente le cifre decimali. L'equivalenza, infatti, è molto utile nel caso di numeri razionali che sono rappresentati da numeri decimali periodici, in cui è disagiata procedere per ispezione, ed ha un'interessante immediata interpretazione geometrica<sup>7</sup>.

Nel caso dei numeri reali un criterio generale è dimostrare che, a partire da un certo punto nelle successioni, gli elementi della successione che approssima per eccesso uno dei due sono inferiori a quelli della successione che approssima l'altro per difetto. In tal caso possiamo concludere che il primo è minore dell'altro.

Ovviamente non è possibile procedere per ispezione sui numeri razionali delle due successioni, perché si richiederebbe di continuare a confrontare (il cosiddetto numero infinito di confronti). Occorre invece provare l'assunto impiegando le proprietà costitutive delle particolari successioni in gioco.

Come si può vedere confrontando la successione che definisce  $\sqrt{2}$

1	1,4	1,41	1,414	1,4142	...
2	1,5	1,42	1,415	1,4143	...

e quella che definisce  $0,001 + \sqrt{2}$

1,001	1,401	1,411	1,415	1,4152	...
2,001	1,501	1,421	1,416	1,4153	...

<sup>6</sup>In matematica è invalso l'uso di definire la nozione di convergenza con riferimento ad una sola successione. La relativa definizione generale, apparentemente più sintetica, risulta a mio avviso concettualmente meno limpida, soprattutto nel discuterne le conseguenze.

<sup>7</sup>Assumiamo che ciascuna frazione, ad esempio  $\frac{a}{b}$ , rappresenti la lunghezza di un segmento, dove  $a$  è il numero di sottomultipli  $1/b$  dell'unità di misura con cui si misura il segmento. Il secondo membro dell'equivalenza esprime semplicemente il confronto delle lunghezze dei due segmenti secondo un comune sottomultiplo dell'unità di misura

il criterio è soddisfatto solo a partire dal quinto termine, mentre nei precedenti vale la condizione inversa. Avendo poi impiegato successioni rigorosamente monotone (solo crescenti o solo decrescenti), questa proprietà costitutiva delle due successioni ci permette di concludere che la condizione è soddisfatta per i successivi termini. Ovviamente, quanto più i due numeri reali sono vicini tanto più lontano nelle successioni il criterio comincia ad essere soddisfatto, e questo rende spesso la dimostrazione meno immediata di quella esemplificata.

Come si vede, non basta più far intervenire le proprietà costitutive di due numeri come nel caso dei numeri interi, ma bisogna far intervenire anche le proprietà costitutive del modo di generare successioni di quanti si voglia numeri, cioè le proprietà di entità che in matematica sono dette funzioni. Successioni come quelle che abbiamo usato in precedenza possono venir infatti considerate funzioni definite sul dominio dei numeri interi.

Concludo questa rapida scorsa di una maniera di definire i numeri reali sottolineando alcuni punti a mio giudizio salienti sotto il profilo metodologico.

In maniera intuitiva ma in parte imprecisa, potremmo dire che il modo di definire i numeri reali che abbiamo delineato li individua tramite una successione di intervalli tra numeri razionali ciascuno contenuto nel precedente e via via più piccolo. Nella rappresentazione geometrica, gli intervalli diventano una successione di segmenti sempre più piccoli su una semiretta e ciascuno è contenuto in tutti i precedenti.

Ne consegue che, se si associano i numeri razionali a punti su una retta, ci si contraddice quando si pretenda di associare a punti su una retta anche i numeri reali: perché un numero reale è costituito da una successione di intervalli tra numeri razionali e a questi corrispondono segmenti sulla retta e non punti<sup>8</sup>.

Questo fatto sembra una limitazione inaccettabile perché non è contraddittorio proporsi di dimostrare se un numero razionale sia maggiore o minore di un numero reale.

Infatti un criterio ragionevole per affermare che un numero razionale è minore di un numero reale può essere l'analogo di quello proposto in precedenza per i numeri reali: dimostrare cioè che esso è sistematicamente inferiore ai numeri razionali che da un certo punto in poi costituiscono la successione degli estremi inferiori degli intervalli che definiscono il numero reale.

È però sintomatico che non si possa estendere ai numeri reali una proprietà dei numeri razionali che riguarda l'uguaglianza. Si prova infatti immediatamente che, scelti due numeri razionali, esistono due numeri interi tali che:

$$m \frac{a}{b} = n \frac{c}{d}$$

perché basta prendere  $m = cb$  ed  $n = ad$  per provare l'assunto.

Ma nel caso dei numeri reali questa proprietà non sussiste: si può solo rendere la loro differenza piccola quanto si vuole<sup>9</sup>. E la cosa non stupisce affatto quando si consideri che, considerando i numeri razionali misura della lunghezza di segmenti, la relazione vista in precedenza diventa una verifica che esiste un'unità di misura con cui la lunghezza dei due segmenti è espressa da numeri interi: una condizione che, come abbiamo, non vale in generale per i numeri reali.

Un altro punto che desidero sottolineare consegue dalla presenza tra gli elementi costitutivi di numero reale di due funzioni definite sull'insieme dei numeri interi e tra loro interrelate<sup>10</sup>. Le definizioni delle

<sup>8</sup>Non stupisce che la cosa abbia ripercussioni anche sull'insiemistica. È stato infatti dimostrato che l'ipotesi del continuo di Cantor (un insieme infinito è isomorfo o all'insieme dei numeri interi oppure a quello dei numeri reali) deve essere aggiunto come assioma indipendente al sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel che è forse il più usato in insiemistica. La dimostrazione è in Cohen P., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York, 1966. Ne discende che le dimostrazioni appoggiate ai numeri interi o ai numeri reali non possono venir trasferite dall'uno all'altro dominio senza verificare se vi abbia rilevanza questo carattere assiomatico dell'ipotesi del continuo.

<sup>9</sup>Si dimostra infatti che dati due numeri reali,  $\lambda$  e  $\mu$ , e un numero intero  $k$ , esistono due interi  $m_k$  ed  $n_k$  per cui vale la relazione  $|m_k \lambda - n_k \mu| < \frac{1}{k}$ .

<sup>10</sup>Ad esempio, tornando al caso di  $\sqrt{2}$  che abbiamo visto in precedenza, la funzione che è usata per individuare l'estremo inferiore dell'intervallo nella successione, al numero intero  $n$  che indicizza il termine della successione, associa un numero

operazioni con i numeri reali e le dimostrazioni che li coinvolgono utilizzeranno poi questi caratteri costitutivi insieme a quelli degli elementi, numeri interi e razionali, che vi sono coinvolti<sup>11</sup>.

Anche le definizioni delle operazioni con i numeri interi e frazionari e le dimostrazioni che li coinvolgono utilizzano i loro caratteri costitutivi. Nel caso dei numeri interi pensati come numeri cardinali utilizzano i caratteri delle collezioni con cui sono costituiti, e nel caso di operazioni con le frazioni vi aggiungono i modi di ricondurle ad operazioni tra numeri interi.

Ma la presenza, tra gli elementi costitutivi dei numeri reali, di funzioni definite sull'insieme dei numeri interi introduce un ulteriore schema categoriale, la convergenza, e questo richiede metodi aggiuntivi che segnano il passaggio dall'aritmetica all'analisi matematica.

Chiudo con un cenno veloce ad un aspetto che ha notevole rilevanza pratica oltre che concettuale.

È consuetudine utilizzare nei calcoli con numeri reali un numero decimale, scelto di solito tra quelli delle successioni viste in precedenza.

Se, però, si pongono problemi di precisione dei calcoli in cui intervengono numeri reali oppure si vogliono paragonare fra loro risultati di istanze diverse di uno stesso calcolo, occorre far riferimento all'insieme di teoremi raggruppati nel capitolo 'calcolo con dati approssimati', dove si stima appunto il range (indicato anche approssimazione o errore) con cui accompagnare il risultato di un'operazione aritmetica a partire dalla stima dell'analogo range che accompagna gli operandi. Nel nostro caso quest'ultimo è di solito una unità dell'ultima cifra decimale del numero razionale scelto.

Tuttavia, questo modo di operare, se ha grandissima rilevanza pratica, contribuisce non poco ad oscurare la sostanziale differenza della struttura matematica dei numeri razionali e dei numeri reali.

---

decimale positivo con  $n - 1$  cifre dopo la virgola, tale che il suo quadrato sia minore di 2 e che il quadrato del numero ottenuto aggiungendo un'unità all'ultima cifra decimale sia invece maggiore di 2. Quest'ultimo viene a sua volta associato allo stesso indice  $n$  dall'altra funzione correlata: la funzione usata per individuare l'estremo superiore dell'intervallo. Sottolineo che non si elencano i termini posti in corrispondenza dalla funzione, ma se ne danno i caratteri costitutivi.

<sup>11</sup>E ricordo che un intervallo nel dominio dei numeri razionali ha una struttura matematica molto ricca di proprietà.