Schemi categoriali e paradossi.[a]

Renzo Beltrame[b]

Sugli scorsi due numeri dei WP Vaccarino ha dedicato un ampio intervento alle antinomie [Vaccarino, 2010a,b]. Nel primo dei due vi sono interpretazioni di due famosi paradossi di Zenone che a me suggeriscono alcune ulteriori considerazioni che espongo qui brevemente.

Per il paradosso di Achille e la tartaruga in uno scorso numero dei WP [Beltrame, 2004] mi sono divertito a sottolineare come Zenone proponga uno schema nel quale le osservazioni sono progressivamente ravvicinate nel tempo e con punti di osservazione altrettanto progressivamente ravvicinati nello spazio. Infatti le osservazioni, non importa quanto numerose, avvengono sempre prima del momento in cui Achille potrebbe raggiungere la tartaruga e, simmetricamente, nello spazio che precede il posto in cui potrebbe raggiungerla. Istante e posto che vanno però ipotizzati impiegando un diverso schema di osservazione

La conclusione a mio avviso più seria è che ci troviamo di fronte a uno schema che non consente di osservare se Achille raggiunga o no la tartaruga, e pertanto qualsiasi conclusione in proposito è un *non consequitur* dall'impiego dello schema.

Data la manifesta abilità dialettica di Zenone, credo gli vada storicamente attribuita una buona manciata di disonestà intellettuale, conviene quindi non indulgere troppo alle deduzioni che gli sono attribuite.

Circa la nozione di infinito e la moderna nozione di limite in analisi matematica, le considerazioni di Vaccarino, in quanto attribuite ai matematici, a me appaiono abbastanza fuorvianti. Afferma infatti:

> *«Per altro l'infinito non è una cosa né un numero ma un'operazione mentale comportante il togliere uno stato finale in quanto c'è sempre un passaggio ad un "ulteriore". Esso si estrinseca in una regola che fissa come procedere serialmente sempre allo stesso modo. Corrisponde appunto ad una serie e non già ad un irriducibilmente metaforico limite a cui essa perviene potenzialmente, ma mai in atto. Ad esempio i matematici parlano di un preteso tendenzialmente, ma mai in atto. Ad esempio i matematici parlano di un preteso numero "e" (numero di Eulero) facendolo corrispondere al preteso limite della serie:*
> *1 + 1/1! + 1/2! + 1/3 ! + ...*
> *ove il punto esclamativo indica il "fattoriale", cioè la moltiplicazione del numero per tutti quelli precedenti. Ad esempio: "3! = 3x2x1= 6". I matematici sbagliano a ritenere che "esista" un "e" ontologico. Si sfocia infatti in una antinomia in quanto si dice che la successione di frazioni per quanto venga sviluppata richiede sempre l'aggiunta di termini ulteriori, ma che in una misteriosa plaga ontologica della "realtà" queste ineffettuabili infinite aggiunte siano tutte fatte in corrispondenza di un "e", considerato come un numero, sia pure irrazionale e trascendente. Diciamo tutto ciò per fare capire che il paradosso della freccia di Zenone, continua a stare alla base della teoria dei "numero reali", fantasticati dai matematici.*

Succede che utilizzando le categoria di uno e di collezione si ottengono soltanto i numeri che in matematica sono detti spesso naturali: cioè i numeri interi, senza segno, zero escluso.

Inoltre, solo l'operazione di addizione applicata a questi numeri dà sempre come risultato uno di questi numeri. E la proprietà vale per la moltiplicazione in quanto ripetizione di una addizione un certo numero di volte, e per l'innalzamento a potenza, ripetizione di una moltiplicazione un certo numero di volte.

Tale proprietà non sussiste già per le operazioni inverse. Infatti possiamo definire la sottrazione in due modi.

Secondo il primo modo si separa da una collezione una sua parte e il resto della collezione originaria costituisce il risultato della sottrazione. Questo modo è coerente con la definizione di numero attraverso unità e collezione ma, affinché l'operazione così definita sia possibile, occorre che il secondo termine della sottrazione sia minore del primo termine. E la limitazione è estremamente scomoda in una successione di operazioni aritmetiche perché, o blocca un gran numero di successioni di operazioni che sono globalmente possibili, o obbliga a rimaneggiare, se possibile, l'ordine delle operazioni anteponendo tutte le somme alle sottrazioni.

Il secondo modo definisce il risultato della sottrazione come soluzione di una equazione, scrivendo cioè che:
$a - b = x$ deve soddisfare la condizione $b + x = a$
e se ne deduce che: se $a>b$ la condizione è soddisfatta aggiungendo a-b, se invece $b>a$ la condizione è soddisfatta togliendo b-a.

[a] *Methodologia Online* [http://www.methodologia.it] - Working Papers - WP 239 - Ottobre 2010
[b] National Research Council of Italy - Pisa Research Area - Via Moruzzi 1, 56124 PISA - Italy - *email:* renzo.beltrame@isti.cnr.it

Qui importa notare come questo secondo modo, che trova realizzazione tecnica nell'introduzione dei numeri negativi e nelle note regole d'uso del segno '-' in algebra, discenda da una analisi delle varie alternative originate dal problema. Tale analisi mette in gioco un pensiero assai articolato, piuttosto che la definizione di uno schema categoriale. E proprio per questo motivo a me sembra opportuno ascrivere questa seconda definizione all'analisi matematica anziché all'aritmetica.

Ma questo ci porta a concludere che in matematica è invalso l'uso di chiamare numeri entità che derivano da procedimenti misti di aritmetica e di analisi matematica. Dove per aritmetica intendo qui definizioni basate unicamente sulle categorie di uno e collezione, come a mio avviso propone Vaccarino.

Un altro esempio di definizione basata sull'analisi matematica lo abbiamo nella radice quadrata di 2, un esempio famoso di "numero reale" per il suo precoce insorgere tra i pitagorici a proposito della misura della diagonale del quadrato assumendo come unità di misura il lato, o comunque un suo sottomultiplo.

Qui interviene come nuovo elemento della definizione la nozione di convergenza[1] che, proprio perché impiega il quantificatore universale (per tutti gli elementi della successione vale una determinata relazione), richiede una dimostrazione basata sulle proprietà deducibili dalla definizione delle successioni. E siamo di nuovo nel territorio dell'analisi matematica piuttosto che dell'aritmetica.

Vaccarino può benissimo non avere simpatici i procedimenti dell'analisi matematica, la cosa è condivisa da molti matematici e ancor più dai logici e dagli informatici. Ma va tenuto ben presente che un procedimento di misura fondato su multipli e sottomultipli di una unità, cioè sulle frazioni, non permette di misurare già tutti i segmenti di interesse della geometria, la cosa è indipendente dalla scelta dell'unità di misura, e ne siamo a conoscenza da quasi 2500 anni.

Non abbiamo un assodato metodo di misura alternativo, e la nozione di convergenza porta concettualmente ad una approssimazione, per quanto sia utile a fini pratici. Ma questo stato di cose mostra quanto sia debole una fondazione del quantitativo sui numeri interi: nei termini della SOI sulle categorie di uno e collezione.

Il paradosso del 'grano di miglio' o del 'mucchio' rende manifesto un altro aspetto a mio avviso importante.

I riferimenti alla soglia di udibilità implicano uno schema diverso da quello proposto da Zenone per cui è preferibile non usarli per individuare l'elemento paradossale. La premessa che la caduta di un granello non provoca rumore è sperimentalmente accertata utilizzando i mezzi disponibili al tempo di Zenone. E il fatto che un mucchio di granelli cadendo provoca rumore è altrettanto sperimentalmente accertato. Ciò che non si accorda con gli esperimenti è invece l'inferenza secondo la quale sommando non importa quante volte non-rumore si ottiene sempre non-rumore.

Il paradosso del mucchio solleva perciò la questione dell'universale e necessario a proposito delle deduzioni, e più in generale i problemi dell'applicazione della logica al mondo fisico. Ci porta cioè alla questione di quali conseguenze garantisca l'impiego dello schema categoriale della deduzione.

La risposta di Aristotele, per quanto attiene la dipendenza della deduzione dalla scelta delle premesse è a mio avviso già negli *Analitici Primi*, mentre per quanto riguarda gli aspetti predittivi si possono richiamare gli *Analitici Secondi*. Ad esempio, al capitolo 8 del I libro, conclude che di ciò che ha generazione e corruzione non si dà scienza in modo universale e necessario, ma solo per accidente, termine a cui si ritiene che Aristotele attribuisse in questi contesti il significato di per lo più e di solito.

Per rimuovere il paradosso sono possibili decisioni diverse. Tra le più usate vi è il conservare i caratteri dell'inferenza e modificare la premessa, passando da un carattere si/no del rumore a una sua quantificazione. Un cambiamento che si accorda con gli esperimenti, i quali mostrano che un certo numero di granelli, variabile con le condizioni dell'esperimento, producono rumore quando cadono insieme.

Siamo infatti in presenza di questioni che non riguardano il nostro pensare, ma le cose pensate. Quindi le proposte della SOI sul modo di descrivere le categorie mentali e sulle relative descrizioni non spostano di una virgola né il problema, né la conclusione noti sin dai tempi di Aristotele.

Riferimenti

R. Beltrame. Sul paradosso di Achille e la tartaruga. *Methodologia Online - WP*, 172, November 2004. ISSN 1120-3854.

R. Beltrame. Sui numeri reali. *Methodologia Online - WP*, 186, February 2006. ISSN 1120-3854.

[1] La cosa è stata presentata con semplici esempi in uno scorso numero dei WP [Beltrame, 2006].

G. Vaccarino. Antinomie (prima parte). *Methodologia Online - WP*, 237, 2010a. ISSN 1120-3854.

G. Vaccarino. Antinomie (seconda parte). *Methodologia Online - WP*, 238, 2010b. ISSN 1120-3854.