

Giuseppe Vaccarino

LA TEORIA DELLA RELATIVITA'

Questa teoria prese le mosse dal tentativo di determinare la velocità della luce rispetto all'etere, assunto come il supporto delle vibrazioni elettromagnetiche, commettendo l'errore di considerare cosa fisica una categoria mentale. Ovviamente nessuna esperienza poteva dare una risposta mancando un osservato da potersi categorizzare come "etere". Sono da ricordare a questo proposito le esperienze di A.A. Michelson- L. W. Morley, di T. Trouton e di H.R. Hobble. Di conseguenza non si poteva introdurre un etere come riferimento privilegiato con la conseguenza di dover ammettere che le leggi dell'elettrodinamica e quindi dell'ottica valgono in modo uguale in due sistemi che si muovono con moto rettilineo ed uniforme uno rispetto all'altro, come veniva asserito dalle leggi fondamentali dell'elettrodinamica (equazioni di Maxwell e di Lorentz), che definiscono fenomeni presentantisi nei moti relativi come l'effetto Doppler.

Il principio della relatività, introdotto dalla meccanica classica, afferma la validità generale delle leggi dell'elettrodinamica nel senso che non è ammissibile un sistema di riferimento assoluto in quiete, dato che con l'esperienza si determinano solo moti relativi. Ad esempio, la legge di Newton è la stessa in due sistemi di riferimento che si spostano uno rispetto all'altro con moto uniforme. Si pensava che per la luce dovesse intervenire un " etere " per spiegare meccanicisticamente con le sue vibrazioni la sua trasmissione. La novità è che nelle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica (e non nelle formule della meccanica) viene introdotto il valore della velocità della luce nel vuoto, precisamente:

$$c = 2,99793 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$$

e quindi dal principio di relatività segue la costanza della velocità della luce in tutti i sistemi in moto uniforme uno rispetto all'altro; cioè la velocità della luce nel vuoto è uguale per tutti i sistemi di riferimento. Questo concetto ebbe conferme sperimentali.

Partendo dal principio della relatività classica e dalla asserzione della costanza della velocità della luce nel vuoto, A. Einstein formulò nel 1908 la *teoria della relatività ristretta*. Secondo la meccanica classica le velocità si sommano in modo lineare e quindi non c'è una velocità massima. Rispetto ad un osservatore che si muove con una velocità "v" la luce dovrebbe muoversi

con una velocità "c-v". Per spiegare la costanza della velocità della luce si deve ammettere che le velocità si compongano in modo non lineare. Einstein allora ritenne che quando le velocità che si sommano sono piccole si ha la classica composizione lineare sancita dall'esperienza comune, quando sono dell'ordine della velocità della luce non è così. La relazione tra la velocità "u=x/t" in "S'" ed "u'="x'/t'" in "S'" deve essere tale che se "u=c" in "S'" deve essere "u'=c" in "S'". Poiché i sistemi si muovono con moto uniforme, le relazioni tra "x'", "t'" ed "x", "t" devono essere lineari. Cioè:

$$x' = ax - bt \quad x = a'x' - b't'$$

Sia "v" (nella direzione "x") la velocità relativa di "S'" rispetto ad "S". L'origine di "S'" (x=0) vista in "S'" si muoverà con velocità "-v" e l'origine di "S'" (x'=0) si muoverà con velocità "v". Il principio di relatività richiede che le relazioni tra "S'" ed "S'" rimangano invariate quando si scambiano i due sistemi, cioè quando si sostituiscono x, t, x' e t' con "-x', t', -x, t". Se si tiene presente che è "v=0" sussiste la relazione "x'=x" ed otteniamo le *trasformazioni di Lorentz*:

$$x' = k(x - vt) \quad t' = k(t - vx/c^2) \\ \text{ove } k = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$x = k(x' + vt') \quad t = k(t' + vx'/c^2)$$

Per velocità piccole rispetto a "c" si passa alle trasformazioni di Galilei della meccanica classica:

$$x' = x - vt \quad x = x' + vt \quad t' = t$$

Vengono chiamati *sistemi inerziali* quelli che si muovono uno rispetto all'altro con moto uniforme e presentano gli stessi fenomeni di inerzia. Nella teoria della relatività il passaggio da un sistema inerziale ad un altro è espresso da una trasformazione di Lorentz invece che di Galilei. In definitiva per la meccanica classica la velocità della luce è infinitamente grande. Secondo le trasformazioni di Lorentz tra la velocità "u" in "S'" ed "u'" in "S'" sussiste la relazione:

$$u' = (u - v) / (1 - uv/c^2)$$

La velocità composta "u'" è sempre maggiore di "u". Quando "u=c" risulta che "u'=c", cioè dalle trasformazioni di Lorentz deriva la costanza della velocità della luce.

Un corpo può avvicinarsi sempre più alla velocità della luce ma mai raggiungerla, cioè è la velocità limite per il moto delle masse. Deve essere considerata come la maggiore *velocità di segnale* possibile. Il tempo minimo per trasmettere un segnale tra due punti x_1 ed x_2 è $(x_2 - x_1) / c$.

In quanto al concetto di *istante*, nella meccanica classica si possono sempre uguagliare le determinazioni di tempo "t" e "t'" in due diversi sistemi inerziali, ma non in quella della relatività, come risulta dalle trasformazioni di Lorentz. Per la meccanica classica è sempre possibile sincronizzare gli orologi in due diversi sistemi inerziali, avendosi un tempo assoluto. Ciò è possibile perché la velocità della luce è considerata infinita, cioè non esiste un limite superiore per la velocità di propagazione dei segnali. Un sistema di segnalazione potrebbe informare contemporaneamente dell'ora di tutti gli orologi dell'universo indipendentemente dal loro stato di moto. Invece secondo la teoria della relatività sono sincronizzabili solo gli orologi in quiete relativa un rispetto all'altro, cioè appartenenti allo stesso sistema di riferimento. Se al tempo "t=0" si trasmette dal punto A un segnale luminoso che venga riflesso da uno B e torni ad A nel tempo "t=τ", si potrà regolare un orologio in B in modo che segni il tempo "τ/2" all'istante della riflessione in seguito alla costanza della velocità della luce. Ma se i sistemi sono in moto uno rispetto all'altro sono diversi i tempi impiegati dalla luce per i percorsi nelle due diverse direzioni ed una sincronizzazione è impossibile. Cioè non è ammesso più il concetto di contemporaneità. Dire che due diversi eventi "ε" ed "ε'" sono contemporanei dipende dal sistema di riferimento che si considera. Si ha il *paradosso degli orologi* in quanto per la relatività della contemporaneità ogni evento deve essere caratterizzato non solo con un punto nello spazio, ma anche con l'istante temporale in cui si verifica. Ciò fisicamente significherebbe che se trascriviamo le trasformazioni di Lorentz per un evento ε₁ individuato in S dalle coordinate x₁ e t₁ ed in S' da x'₁ t'₁ ed analogamente per un evento ε₂ in S', sottraendo si ha:

$$\begin{array}{ll} t_1 - t_2 = k(t'_1 - t'_2) & \text{per } x'_1 = x'_2 \\ t'_1 - t'_2 = k(t_1 - t_2) & \text{per } x_1 = x_2 \end{array}$$

Poiché "k" è sempre maggiore di "1", la prima equazione significa che se le lancette di un orologio in quiete rispetto a "S'" compiono un giro del quadrante nel tempo "t'₁ - t'₂", le stesse viste in "S" percorrono il quadrante nel tempo "t₁ - t₂" che è k volte maggiore. Le lancette di un orologio in quiete rispetto ad "S'", viste dal sistema "S" si muovono "1/k" volte più lentamente. Analogamente nella seconda enunciazione. Si parla di *paradosso degli orologi* perché le equazioni per "t₁ - t₂" e "t'₁ - t'₂" sembrano

essere contraddittorie quando "k" è maggiore di uno; ma la contraddizione non sussiste perché i due eventi hanno un diverso significato nelle due equazioni. Nel primo caso essi si verificano nello stesso punto di "S" ($x'_1 = x'_2$) nel secondo nello stesso punto di "S" ($x_1 = x_2$). L'affermazione che i due eventi avvengono nello stesso luogo ha significato solo rispetto ad un sistema di riferimenti perché non esiste uno spazio assoluto. Ad esempio, il *mesone*, in quanto decade dopo una certa vita media, in un elettrone ed un neutrino più un antineutrino. Esso anche se si propagasse con la velocità della luce potrebbe percorrere nel tempo della sua vita media una distanza di circa 660 metri. In effetti percorre una distanza da 100 a 1000 volte maggiore senza decadere per la "dilatazione" (rallentamento) del tempo. La sua vita media osservata dalla terra appare aumentata del fattore "k". Solo se un fisico si accompagnasse al mesone μ e si trovasse così nel suo sistema di quiete, constatarebbe che decade in base a quanto risulta dalla sua vita media.

Si propone il *paradosso dei gemelli* ammettendo che un astronauta lasci un fratello gemello sulla terra. Il missile su cui viaggia raggiunge la velocità "v" che supponiamo sia prossima a quella della luce. Dopo un tempo " $\tau/2$ " il missile rientra con la stessa velocità. L'astronauta si trova nel tempo " $t=\tau$ " presso il gemello. Risulta allora che questi è invecchiato di un tempo " τ " mentre l'astronauta solo di " τ/k ". Quanta maggiore è "v" tanto meno l'astronauta è invecchiato. Potrebbe percorrere tutta la Via Lattea senza praticamente invecchiare se la sua velocità fosse abbastanza vicina a quella della luce. Si può sollevare l'obiezione che il tempo biologico differisca da quello fisico, ma i sostenitori della relatività ribattono che poiché la fisiologia si fonda anche su leggi fisiche e chimiche l'organismo umano è soggetto nella sua globalità alla teoria della relatività. Tuttavia queste affermazioni commettono a mio avviso l'errore di considerare il tempo come una cosa fisica mentre è una categoria mentale.

Si ha una *meccanica relativistica* in quanto dal sistema di riferimento dipende oltre all'unità di misura del tempo anche quella della lunghezza. Pertanto dalle trasformazioni di Lorentz si ottiene:

$$\begin{aligned} x'_1 - x'_2 &= k(x_1 - x_2) \quad \text{per} \quad t_1 = t_2 \\ x_1 - x_2 &= k(x'_1 - x'_2) \quad \text{per} \quad t'_1 = t'_2 \end{aligned}$$

La distanza " $x_1 = x_2$ " di due eventi contemporanei in "S" è $1/k$ volte minore della distanza dei due eventi visti da "S'". I regoli in moto appaiono contratti nel rapporto $1/k$. Questa volta le due equazioni non sono in contraddizione perché si riferiscono a due diverse coppie di eventi. La prima è contem-

poranea in "S", la seconda in "S'". Poiché la contemporaneità dipende dal sistema di riferimento, le due equazioni descrivono situazioni diverse. La contrazione $1/k$ avviene solo in direzione del moto. Si chiama *contrazione di FitzGerald-Lorentz* perché questi due autori indipendentemente la avevano invocata per spiegare l'esito negativo dell'esperienza di Michelson-Morley riconducendola alla contrazione dell'interferometro in una direzione. Di conseguenza è da ammettere che una sfera in moto veloce appare come un ellissoide di rotazione appiattito visto da un altro sistema. Un automobilista viaggiante ad una velocità vicina a quella della luce visto dalla strada apparirebbe rattrappito mentre egli vedrebbe rattrappito il paesaggio e non la vettura.

Nella meccanica classica vale la legge di Newton " $F = m a$ ", secondo la quale un'alterazione dello stato di moto di una massa implica l'azione di una forza. Tale legge vale nel riferimento in quiete "S" del punto materiale. Indicando in S' con ζ la coordinata di posizione "x" e con τ quella di tempo (*tempo proprio*) chiamiamo con "m" la *massa di riposo*, Cioè è.

$$F^{\circ} = m^{\circ} \frac{d^2 \zeta}{d \tau^2}$$

Se passiamo ad un sistema inerziale "S" arbitrario in cui il punto materiale abbia la velocità " $dx/dt = v$ ", tra le coordinate di "S" ed "S'" sussiste la trasformazione di Lorentz:

$$\zeta = k (x - v t) \qquad \tau = k / t - v x / c^2$$

L'intensità della forza F che agisce sul punto materiale in "S" deve risultare dall'esperienza. Si ha allora che le equazioni dell'elettrodinamica sono Lorentz-invarianti. Dalla loro invarianza possiamo stabilire quale sia la legge di trasformazione della forza nel passaggio da un riferimento "S'" al riferimento "S": Risulta:

$$F = m \frac{d^2 \zeta}{d \tau^2} = m^{\circ} k \frac{d^2 x}{d t^2} \quad e$$

$$F = \frac{d p}{d t} \quad \text{ove} \quad p = m \frac{d x}{d t} \quad \text{ed} \quad m k m^{\circ} = \frac{m^{\circ}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Se indichiamo con "p" l'impulso del punto materiale, come nella meccanica classica la forza è uguale alla variazione dell'impulso nell'unità di tempo. Sussiste anche la relazione che uguaglia l'impulso con il prodotto della massa per la velocità purché si consideri la *massa relativistica* " $m = m(v)$ " la quale dipende dalla velocità. Essa in ogni sistema di riferimento in moto è maggio-

re di quanto lo sia nel riferimento in quiete. Questo concetto sarebbe confermato dallo studio del moto di particelle elementari altamente energetiche. E' trascurabile per velocità piccole. Per accelerare una massa alla velocità della luce occorrerebbe una forza infinitamente grande. Sono i fotoni che hanno la velocità della luce ed in ciò si differenziano dalle particelle materiali. In assenza di forze l'impulso non dipende dal tempo ed è quindi una grandezza che si conserva. Nella teoria della relatività vale anche la legge della conservazione della quantità di moto.

Un concetto fondamentale è quello della *equivalenza massa-energia*. E' "energia" il lavoro compiuto o che potrebbe compiersi sotto l'azione di una forza: "Lavoro" è il prodotto di forza con spostamento. Risulta che l'incremento dell'energia lungo il cammino è:

$$d g = d x = d (k m^{\circ} c^2) = d (m c^2)$$

L'energia ε diviene allora (a meno di una costante additiva):

$$\varepsilon = m c^2 \frac{= m^{\circ} c^2}{\sqrt{1 - v/c^2}}$$

Ad ogni massa corrisponde un'energia data dalla massa moltiplicata per il quadrato della velocità della luce. Possiamo scomporre l'energia totale ε in un'energia di riposo $\varepsilon^{\circ} = m^{\circ} c^2$ ed in un'energia cinetica che per velocità molto minori di quella della luce mantiene la forma tradizionale $\varepsilon_{cin} = 1/2 m^{\circ} v^2$. La novità introdotta dalla teoria della relatività è l'energia di riposo ε° , che comporta per ogni massa in quiete una corrispondente grande quantità di energia. Si spiega anche il difetto di massa dei nuclei atomici, cioè il fatto che la massa del nucleo è minore della somma delle masse delle particelle che lo compongono. La differenza corrisponde all'energia di fusione. Questo "difetto di massa", da cui proviene l'energia nucleare, è circa l'1% della complessiva. I quanti di luce che trasportano l'energia elettromagnetica sono anch'essi particelle elementari. Anche l'energia elettromagnetica possiede una massa inerte, che corrisponde a ε/c^2 .

Dalla *invarianza* delle leggi naturali per le trasformazioni di Lorentz segue che l'energia, la quantità di moto, il momento angolare e la velocità del baricentro soddisfino a *leggi di conservazione*. Cioè per un sistema isolato non dipendono dal tempo, Dalla legge di conservazione dell'energia segue quella di conservazione della massa della chimica, includendo la massa corrispondente all'energia cinetica che si libera nei processi di trasformazione.

Il carattere spaziale e temporale di un intervallo è Lorentz-invariante. Se due eventi sono separati da un intervallo temporale può porsi tra di essi una connessione causale, mentre così non è se sono separati da un intervallo spaziale. Cioè si ha un ruolo particolare del tempo nei riguardi della causalità. Non bisogna pensare

che la teoria della relatività consideri alla stessa stregua lo spazio ed il tempo.

La *teoria della relatività ristretta* riconduce la fisica all'invarianza delle leggi naturali rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Essa si riferisce al passaggio tra due sistemi inerziali qualsiasi. In questo senso la relatività ristretta è parte integrante della fisica moderna. Invece la *teoria della relatività generale* pone una relazione tra la legge di inerzia e la gravitazione. Essa si fonda su trasformazioni di coordinate più generali di quelle di Lorentz. Per la legge di Newton l'inerzia di un corpo è proporzionale alla sua massa. La legge di attrazione tra due corpi è direttamente proporzionale alle loro masse ed inversamente al quadrato delle loro distanze. La teoria relativistica della gravitazione è fondata sul fatto che la massa pesante e la massa inerte di un corpo sono uguali. Segue che osservando l'azione di una forza non possiamo stabilire se ci troviamo in un campo gravitazionale od in un sistema di riferimento uniformemente accelerato (esperimento teorico della cabina di Einstein). Infatti in entrambi i casi saremmo sempre spinti verso il fondo della cabina. E' perciò possibile riferirsi in ogni punto dello spazio-tempo a sistemi inerziali nei quali non agisce alcuna forza di gravitazione e perciò ad osservatori in caduta libera. Poiché il campo gravitazionale (da eliminare) non è omogeneo, è necessario considerare in ogni punto un diverso sistema di riferimento inerziale. Al posto del campo gravitazionale si pone una relazione metrica tra due punti dello spazio-tempo onde la geometria del continuo quadridimensionale non corrisponde più a quella di Euclide: Non tenendo presente che si tratta di una categoria mentale secondo Einstein lo spazio si rende curvo e perciò in esso i pianeti si muovono non in modo rettilineo ma secondo ellissi. In esso il concetto di retta non è definibile e viene sostituito da quello di *linea geodetica*, cioè quella di minore lunghezza tra due punti dello spazio-tempo. Su questa base Einstein vuole fondere la legge di gravitazione con quella di inerzia, dicendo che un punto materiale, soggetto solo a forze gravitazionali si muove nel continuo spazio-temporale lungo una geodetica. In assenza di masse gravitazionali la geometria diviene euclidea e le geodetiche si riconducono a rette.