GIUSEPPE VACCARINO

L'IMPLICAZIONE STRETTA E LA LOGICA DELLE MODALITÀ

ESTRATTO DA
IL PENSIERO AMERICANO CONTEMPORANEO
EDIZIONI DI COMUNITÀ
MILANO 1958

Giuseppe Vaccarino è nato a Pace del Mela (Messina) nel 1919. Si è laureato in Chimica Industriale presso l'Università di Milano nel 1941. E' libero docente di Filosofia della Scienza. Ha pubblicato saggi vari di filosofia, metodologia e logica simbolica in riviste (*Sigma, Methodos, Archimede, Rivista critica di storia della filosofia*, etc.) e in Atti di Congressi.

1. - La logica simbolica riscuote vasti interessi negli Stati Uniti d'America. Basti pensare che in questo paese si pubblica il *Journal of Symbolic Logic,* che oltre ad accogliere articoli originali, si assume il compito di riassumere o per lo meno citare tutte le pubblicazioni sull'argomento. Per il periodo precedente al 1936, e precisamente quello compreso tra il 1666 ed il 1935, Alonzo Church ha pubblicato sulla stessa rivista una completa bibliografia [1].

I contributi originali della scuola americana sono numerosi, ma evidentemente non possono essere trattati indipendentemente da quelli europei. Così in questo saggio devono essere tenuti presenti lavori come quelli di Oskar Becker.

Oltre che ad autori americani come C. J. Lewis, A. F. Emch, F. B. Fitch, E. V. Huntigton, J. C. C. Mc Kinsey, W. T. Parry, N. V. Quine, A. Church, ecc., faccio riferimento anche ad emigrati europei come R. Carnap, H. Reichenbach, A. Tarski, ecc.

L'esposizione è svolta in termini il più possibile elementari. Nessuna cognizione è presupposta. Ma nel presentare i punti basilari della logica simbolica sono stato costretto ad essere molto breve. Ho ritenuto opportuno ricorrere ai simboli usuali della logica simbolica, poiché altrimenti il testo sarebbe diventato estremamente prolisso ed in definitiva più complicato. Il lettore che non ha pratica di questi simboli è però messo in condizione di poterli capire. Tenga presente che essi servono per snellire e semplificare l'esposizione e sono facilmente accessibili a chiunque.

La nozione di *implicazione stretta,* distinta dalla *implicazione materiale,* è stata introdotta da C. J. Lewis, che ha anche mostrato gli stretti legami che intercorrono tra essa e le modalità. È anche opera di Lewis la definizione dei vari sistemi modali S1, S2, S3, S4, S5.

In questo saggio mi occupo soprattutto delle vedute di quest'autore,

[1] A. Church: « A Bibliography of Symbolic Logic », *The Journal of Symbolic Logic,* 1, 4, 1936, pp. 121-218; « Additions and Corrections to a Bibliography of Symbolic Logic », *ibid.,* 2, 4, 1938 pp. 178-212.

Per brevità indicheremo i riferimenti al *Journal of Symbolic Logic* con le iniziali *J.S.L.*

ma dò anche brevi esposizioni degli ulteriori sviluppi effettuati per opera di W. T. Parry, di J. C. C. Mc Kinsey, ecc. Infine mi occupo anche delle concezioni semantiche di R. Carnap e di altri autori, che sono essenziali per presentare un quadro d'insieme sufficientemente comprensivo delle questioni che vengono dibattute.

Poiché oltre a Lewis sono quasi tutti americani anche gli altri autori che si sono occupati dell'argomento, ritengo che esso si presti egregiamente per illustrare uno specifico contributo dato dal pensiero americano alla logica simbolica. Non è certo possibile in una disciplina altamente tecnicizzata come questa trovare al di sopra delle varie trattazioni particolari un più generale indirizzo speculativo, che consenta discutere aspetti peculiari della mentalità americana. Analogamente non sarebbe possibile caratterizzare una matematica od una fisica americana, prescindendo dal luogo in cui sono nati od hanno svolto le loro ricerche i vari autori.

2. - Nella grande sistemazione della logica simbolica fatta da A. N. Whitehead e B. Russell[2], si parte da alcuni concetti assunti come primitivi, ai quali viene attribuita una natura logica. Da essi con una serie di definizioni e di deduzioni si ottiene il sistema della logica simbolica, adoperato quindi per la definizione dei concetti della matematica. La logica viene identificata con la stessa facoltà del pensare e perciò questi autori non hanno alcun dubbio circa la legittimità del porre all'inizio delle idee logiche, nel presupposto che per esse non occorra stabilire come si fa a costruirle.

I concetti presi come primitivi sono:

1) *le proposizioni elementari*, indicate con le lettere 'p', 'q', 'r', ecc., che vengono presentate come un tutt'uno, privo d'interna struttura. Ad es. una dizione corrente affermante qualcosa, come ' Carlo canta ', si può tradurre in questa simbologia, considerandola come una proposizione p.

2) *le funzioni proposizionali elementari*, che sono espressioni contenenti almeno un costituente indeterminato x, y, ecc. (variabile), tale che se ad esso viene assegnato il valore di verità o di falsità, tutta l'espressione diviene una proposizione e viene ad acquistare anch'essa un valore di verità o di falsità. Se tale valore della variabile non viene assegnato, tutta l'espressione mantiene un valore ambiguo; cioè non si può dire se è vera oppure falsa. In questo senso, per distinguerle dalle proposizioni, che sono vere oppure false, le espressioni del genere vengono chiamate *funzioni proposizionali*. Esse si indicano con 'Φx', 'ψx', 'Φy', ecc.

2 A. N. WHITEHEAD-B. RUSSELL: *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, sec. ed. rist. 1950, vol. I, p. 91 e seg.

Avvertiamo il lettore che, per dare omogeneità alla nostra esposizione, adottiamo una simbologia unitaria. Siamo perciò costretti a cambiare spesso le notazioni dei vari lavori a cui facciamo riferimento. Tutte le volte che è possibile ricorriamo ai simboli di Whitehead-Russell.

Se al posto delle variabili si sostituisce [3] una costante, diventa possibile affermare se l'asserito è falso o vero. La dizione ' funzione proposizionale ' indica le notazioni tipo Φx, per le quali non si può dire se sono vere o false; mentre le notazioni tipo Φa, per le quali questa affermazione si può fare, sono considerate proposizioni.

Una proposizione corrente come ' Carlo canta ' si traduce in questa simbologia, considerando ' Carlo ' come argomento, cioè come una costante sostituita al posto di x e ' canta ' come un predicato, anch'esso costante che corrisponde a Φ. Se effettivamente Carlo canta la proposizione è vera; altrimenti è falsa. In entrambi i casi è una proposizione. Invece ' x canta ' è una funzione proposizionale.

In logica simbolica di solito non si dà un significato particolare ai segni impiegati. Perciò l'accennato criterio della sostituzione, che permette di passare dalle funzioni proposizionali alle proposizioni, ha scarso interesse. Si ricorre più frequentemente al *criterio della quantificazione,* che consiste nel *legare* le variabili con gli operatori o quantificatori (x) ed $(\exists x)$, chiamati *quantificatore universale* e *quantificatore esistenziale,* i quali indicano rispettivamente che la funzione è estesa a tutte le x e ad almeno una x. Le variabili in quanto legate da un quantificatore si dicono *apparenti.* Scrivendo perciò un quantificatore prima della funzione proposizionale si ottengono formule di proposizioni, che nel caso di una sola variabile sono dei due tipi seguenti:

$$(x)\ \Phi x \qquad \text{ed} \qquad (\exists x)\ \Phi x.$$

Esse si leggono rispettivamente: ' per tutti i valori della variabile x si ha la funzione Φ ' e ' vi è almeno un valore della variabile x per il quale si ha la funzione Φ '. Si tratta di proposizioni in quanto si pensa di poter asserire se è vero o falso che Φ competa a tutte le x e se è vero o falso che vi sia almeno una x a cui competa Φ. Ad es. $(x)\ \Phi x$ è falsa se significa: ' tutte le rose sono profumate '. È vera se significa: ' tutti gli uomini sono mortali '. Analogamente $(\exists x)\ \Phi x$ è vera se significa: ' alcuni cani sono neri ': è falsa se significa: ' alcune città sono senza strade '.

Nelle pagine seguenti di solito ci riferiremo alle proposizioni elementari p, q, r, indicate come un tutt'uno.

3) *L'asserzione di una proposizione,* che viene indicata, seguendo Frege, con il simbolo ' $\vdash$ ', posto prima del segno della proposizione. Si distingue in tal modo una proposizione p semplicemente considerata, da una proposizione $\vdash p$ asserita. Questa notazione indica cioè che p è vera. Analogamente si ha ad es. $\vdash (x)\ \Phi x$.

4) Vengono assunti come concetti primitivi anche la negazione e la disgiunzione. La negazione $\sim$ viene introdotta affermando che se p è una proposizione vera, si ha una proposizione $\sim p$, che indica la fal-

[3] Questo è il così detto *criterio della sostituzione.* Indicando le costanti con 'a', 'b', ecc. si hanno formule quali Φa, ψa, Φb, ecc.; per le quali si può dire se sono vere o false.

sità di p. Ad es. se p significa 'tutti gli uomini sono mortali' si avrà una proposizione $\sim p$, la quale afferma che non è vero che tutti gli uomini sono mortali. Assumendo p come vera, sarà falsa $\sim p$.

La *disgiunzione* o somma logica di due proposizioni p e q indica che una di esse od entrambe sono vere. Si indica con '$p \vee q$'. Perciò $\sim . p \vee q$ significherà che è falso che p o q siano veri, mentre $\sim p \vee q$ significherà che o p è falso o q è vero[4].

Ad es. 'Pietro è alto o biondo' è una proposizione vera nei tre casi in cui Pietro è alto ed anche biondo ed è solo alto o solo biondo. È falsa solo se non è né alto, né biondo. La disgiunzione corrisponde ad uno degli usi del corrente '*o*' e precisamente a quello espresso dal '*vel*' latino.

Con la disgiunzione e la negazione nel *Principia Mathematica* vengono definite le altre operazioni logiche. Così ad es. si definisce il *prodotto logico* o *copulativa*, che viene indicato con il punto '•', ricorrendo alle due formule seguenti (leggi di De Morgan):

2.0 $\quad \sim . p \bullet q . = . \sim p \vee \sim q$

2.0.1 $\quad \sim . p \vee q . = . \sim p \bullet \sim q$

(Non si confonda il punto indicante la copulativa, in neretto, con quelli di cui alla nota [4]). Il prodotto logico corrisponde alla corrente congiunzione '*e*'.

Particolarmente interessante per l'argomento di cui ci occupiamo è l'*implicazione materiale*, che si indica con il segno '$\supset$'. Essa viene definita con la formula seguente:

2.1 $\quad p \supset q . = . \sim p \vee q$

la quale afferma: 'p implica q' si definisce come 'o p è falso o q è vero'. Ad es. 'se piove allora la strada è bagnata' viene definito dicendo 'o non piove o la strada è bagnata'. La definizione naturalmente è fondata sull'aver assunto come primitivi i concetti di $\vee$ e di $\sim$.

Però l'implicazione materiale non corrisponde all'uso corrente di 'se.... allora....', cioè alla *conseguenza*. Infatti correntemente si richiede che si abbia un nesso logico tra l'antecedente ed il susseguente, nel senso che è la presenza del primo a provocare il secondo. Nella $p \supset q$ si possono sostituire al posto di p e di q proposizioni tra le quali si abbia tale nesso, ma anche altre proposizioni qualsiasi, assolutamente discordanti. L'unico obbligo è che q sia vera affinché sia vera $p \supset q$. Si potrebbe per es. dire che 'se il cane abbaia allora la strada è bagnata' è vera purché effettivamente la strada risulti bagnata.

I logicisti affermano perciò che l'implicazione materiale non corri-

[4] Con l'uso dei punti viene determinato il campo su cui si estende il significato di un segno rispetto agli altri. Così in $\sim . p \vee q$ il punto indica che la negazione riguarda tutta l'espressione $p \vee q$. In sua assenza, cioè nella $\sim p \vee q$ si intende negata solo la p. Invece dei punti si possono adoperare anche le parentesi, scrivendo ad es. $\sim (p \vee q)$. I punti possono essere anche multipli. Ad es. $p : \supset \sim . p \supset \sim p$ significa che p implica tutta l'espressione successiva, e che $\sim$ si riferisce a tutta l'espressione parziale $p \supset \sim p$; cioè se p è vero allora non è vero che p implica non p.

sponde alla corrente conseguenza. Anzi poiché il termine ' implicazione ' potrebbe fare pensare ad un rapporto conseguenziale, si è proposto di chiamarla altrimenti. Così W. N. Quine[5] la denomina ' condizionale '.

Non possiamo qui discutere in dettaglio i motivi per cui con i procedimenti della logica simbolica di cui si è fatto cenno non si riesce a rendere la corrente conseguenza. Basti dire che questa deve ricondursi ad un certo passaggio tra particolari cose o situazioni, che solo in un secondo tempo può essere eventualmente generalizzato. Ad es. si pone un certo processo di passaggio tra un ' piove ' ed un ' strada bagnata ', che costituisce la conseguenza. Dopo si può generalizzare ponendo lo stesso processo tra tutti i ' piove ' e tutte le ' strade bagnate '. Successivamente si può generalizzare ulteriormente, parlando oltre che di ' piove ' di tutte le situazioni implicanti, ed oltre che di ' strada bagnata ' di tutte le situazioni implicate. Le une e le altre si possono denominare rispettivamente ' p ' e ' q '; ma è chiaro che i simboli ' p ' e ' q ' non indicheranno proposizioni qualsiasi, ma solo la raccolta di tutte quelle proposizioni che sono rispettivamente implicanti ed implicate. Uno specifico impegno semantico deve avvertire di quest'uso dei simboli. Invece il modo con cui in logica simbolica si concepisce il formalismo, cioè come considerazione di simboli senza simbolizzati, od indipendentemente dai simbolizzati, blocca in partenza il riferimento ai particolari. Infatti non è che in effetti si abbiano simboli del genere, privi di significato, dato che simboli e simbolizzati sono correlati e non possono esserci gli uni senza gli altri; ma semplicemente si assumono simboli che hanno simbolizzati qualsiasi. In questo senso ' p ' e ' q ' indicheranno qualunque proposizione. La conseguenza invece si può porre solo tra certe proposizioni, ed è il rapporto tra le proposizioni di quella specie che viene poi generalizzato. Quindi la $p \supset q$ della logica simbolica rinuncia in partenza alla specificità degli impegni semantici che consentono di parlare della conseguenza. In quanto i simbolizzati sono qualsiasi (formalismo) tra di essi vi saranno infatti sia le proposizioni in rapporto inferenziale, sia le altre. Possiamo quindi concludere che la definizione data dell'implicazione materiale si risolve in un tentativo di imporre un rapporto inferenziale anche alle proposizioni che non sono poste in tale rapporto. Il paradosso è quindi implicito nel procedimento.

Vedremo che C. J. Lewis propone un'altra implicazione, l'*implicazione stretta,* tale da corrispondere alla corrente conseguenza. Egli non intende con ciò correggere un'insufficienza dell'implicazione materiale, alla quale viene lasciata un'importante funzione logica, ma solo introdurre un calcolo più ristretto, nel quale le proposizioni p e q siano tali da ottemperare a quanto si richiede per la corrente nozione di conseguenza. Vedremo che il presupposto formale è sempre presente e che le difficoltà da esso conseguenti si ritengono aggirabili introducendo le modalità. Sostanzialmente l'implicazione stretta, che viene indicata

[5] W. V. QUINE: *Mathematical Logic,* Harvard University Press, 1947, pp. 14-18.

con la formula '$p \prec q$', viene definita affermando che non è possibile che si abbiano insieme p e *non* q. Ad es. poiché non è possibile che si abbiano insieme 'piove' e 'strada non bagnata' l'implicazione è stretta. Mentre nell'altro esempio di cui sopra: 'se il cane abbaia allora la strada è bagnata', si può ritenere che si abbia un'implicazione materiale legittima, purché risulti che la strada sia effettivamente bagnata. Ma non si ha un'implicazione stretta, dato che è possibile che il cane abbai e la strada non sia bagnata. Non c'è quindi conseguenza logica.

Le difficoltà vengono in tal modo effettivamente superate? Si riesce a formalizzare la corrente conseguenza? Discuteremo nelle pagine seguenti questo punto.

È necessario intanto dare alcune formule tipiche dell'implicazione materiale, che ne illustrano le proprietà:

2.2 $\quad p \equiv q \,.=.\, (p \supset q) \bullet (q \supset p)$

Il segno '$\equiv$' indica l'equivalenza delle due proposizioni, mentre '$\bullet$' indica la copulativa. Si definisce cioè che due proposizioni sono equivalenti, quando una implica l'altra e viceversa.

La formula seguente indica che se si ha p si deve avere anche q, nel senso che non è possibile avere insieme p e $\sim q$:

2.3 $\quad p \supset q \,.=.\, \sim (p \bullet \sim q)$

Risulta inoltre che una proposizione p od implica una proposizione q o implica la sua negazione, cioè:

2.4 $\quad p \supset q \,.\vee.\, p \supset \sim q$

Una proposizione vera p è implicata ad ogni proposizione q (*verum sequitur quodlibet*):

2.5 $\quad p \,.\supset.\, q \supset p$

Mentre una proposizione falsa $\sim p$ implica qualsiasi proposizione q (*ex falso sequitur quodlibet*):

2.6 $\quad \sim p \,.\supset.\, p \supset q$

Le 2.5 e 2.6 mostrano in modo evidente il carattere paradossale che avrebbe l'implicazione materiale se fosse confusa con la conseguenza. Esse vengono chiamate *paradossi dell'implicazione materiale* poiché affermano princìpi che nessuno correntemente sottoscriverebbe. Secondo la 2.6 ad es. basterebbe affermare una proposizione falsa perché da essa venga implicata una qualunque proposizione vera.

Ragioni di spazio ci impediscono di citare altre formule. Queste comunque sono sufficienti per illustrare le proprietà fondamentali dell'implicazione materiale. Introducendo le funzioni proposizionali ed i quantificatori si ha un'altra serie di formule. Tra di esse ci interessa solo ricordare la seguente, che definisce la così detta *implicazione formale* [6]:

2.7 $\quad (x) \,.\, \Phi x \supset \psi x$

la quale si legge: 'Φx implica formalmente ψx'. La parola 'formale'

[6] A. N. WHITEHEAD-B. RUSSELL: *op. cit.*, p. 20.

non deve trarre in inganno, quasi fosse determinante della 2.7. Anche l'implicazione materiale è considerata formale, nel senso che non si farebbe riferimento al significato delle proposizioni. L'implicazione formale è semplicemente il prodotto logico delle corrispondenti implicazioni materiali per tutti i valori di x. Cioè:

$$(x) . \Phi x \supset \psi x : = : \Phi a \supset \psi a \bullet \Phi b \supset \psi b \bullet \Phi c \supset \psi c \bullet \ldots\ldots$$

Infatti la quantificazione universale di una funzione Φx si può definire come il prodotto logico delle infinite funzioni costanti dei significati *a, b, c,* ecc. di 'x'. Analogamente il quantificatore esistenziale si può definire come la disgiunzione di questi valori.

3. - Presentiamo ora le varie operazioni logiche, ed in particolare l'implicazione materiale, seguendo il metodo delle *matrici logiche,* introdotto dall'americano C. S. Peirce [7].

Tanto il metodo delle matrici che quello assiomatico ci serviranno per discutere l'implicazione stretta ed i sistemi modali.

Una matrice logica si ottiene per due proposizioni elementari p e q considerando i valori delle proposizioni composte in corrispondenza alle possibili coppie di valori delle proposizioni elementari. Indicando con '*1*' il valore della verità e con '*0*' quello della falsità, si avranno quattro combinazioni di valori delle proposizioni elementari, per ognuna delle quali si avrà un valore della proposizione composta. Precisamente si avranno $p = 1$ e $q = 1$, $p = 1$ e $q = 0$, $p = 0$ e $q = 1$, $p = 0$ e $q = 0$. Ad ognuna di queste combinazioni di valori delle due proposizioni elementari corrisponderà un valore della proposizione composta, che sarà *1* oppure *0*.

Sono possibili in tutto $2^4 = 16$ funzioni composte per le matrici bivalenti, cioè quelle per cui i soli valori sono due: il vero *1* ed il falso *0*. Per l'alternativa $\vee$ (chiamata 'disgiunzione' nei *Principia*), la *copulativa* $\bullet$, l'implicazione materiale $\supset$, e l'equivalenza $\equiv$ si hanno le matrici che riepiloghiamo nella seguente tabella:

p	q	$p \vee q$	$p \bullet q$	$p \supset q$	$p \equiv q$
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*

Ad es. l'implicazione materiale è vera, cioè ha il valore *1* quando tanto p che q sono vere; è falsa, cioè ha il valore *0* quando p è vera e q è falsa; è vera quando p è falsa e q è vera o tanto p che q sono false. Stabilito quest'ordine, la successione *1011* indicherà in modo uni-

[7] Cfr. L. WITTGENSTEIN: *Tractatus Logico-Philosophicus,* London: Routledge & Kegan P. ltd., IV ed. 1949; n. 4.3 e segg. In generale il calcolo delle proporzioni viene trattato o secondo il metodo delle matrici o con quello assiomatico, cioè costruendo un sistema in cui sono fissati gli assiomi fondamentali e le regole di trasformazione. Tutte le altre formule vengono dedotte. Le regole sono quelle dell'*inferenza* (se $\vdash p$

voco la matrice dell'implicazione materiale. Analogamente *1110* indicherà quella dell'alternativa, *1000* quella della copulativa, ecc.

Alle matrici si dà anche un'altra forma, che è soprattutto comoda nel caso di quelle polivalenti, cioè con più di due valori. Precisamente su un rigo orizzontale vengono scritti i valori di q, su uno verticale quelli di p e nell'interno i corrispondenti valori della proposizione composta. Per l'implicazione materiale sarà ovviamente:

$\supset$	1	0
1	1	0
0	1	1

Il metodo delle matrici è fondato sulla concezione di Wittgenstein secondo cui le possibilità di verità delle proposizioni elementari sono le condizioni di verità e di falsità delle proposizioni composte. In particolare non si avrà più come pensava Frege, che la negazione indica la falsità di p. Essa indicherà la falsità solo nel caso in cui p sia vera. Indicherà invece la verità nel caso in cui p sia falsa, conformemente alla matrice monoargomentale:

p	$\sim p$
1	0
0	1

Risulta pertanto che il segno di asserzione '$\vdash$' di Frege e di Russell viene eliminato, in quanto l'asserire un'espressione significa semplicemente che essa è sempre vera, qualunque siano i valori di verità o di falsità delle proposizioni elementari costituenti. Si ha precisamente in questo caso una *tautologia*, che possiede una matrice alla stessa stregua delle altre operazioni logiche e precisamente la matrice sempre vera *1111*, secondo la quale, qualunque sia il valore di verità o di falsità delle proposizioni elementari che la costituiscono, è sempre vera. Tutte le formule che abbiamo dato e che daremo come legittime sono tautologie. Ad es. le 2.0, 2.1, 2.2, ecc. Il lettore controllerà facilmente mediante le matrici, che qualunque siano i valori di p e q, queste formule hanno sempre il valore *1*. Le leggi logiche o proposizioni analitiche sono sempre tautologie. Il metodo delle matrici fornisce tra l'altro un criterio assai semplice per controllare se una certa espressione è o non è tautologica.

In quanto all'implicazione materiale, la sua matrice mostra in modo particolarmente evidente che essa non ha nulla a che fare con la

e se $\vdash . p \supset q$ allora $\vdash q$) e della *sostituzione*, secondo la quale a qualsiasi segno proposizionale od espressione se ne può sostituire un altro, purché dovunque nel testo. Secondo Hilbert-Bernays per il sistema dei *Principia Mathematica* sono sufficienti i seguenti quattro assiomi: a) $p \vee p . \supset . p$, b) $p . \supset p \vee q$, c) $p \vee q . \supset . q \vee p$, d) $p \supset q . \supset : r \vee p . \supset . r \vee q$.

Gli assiomi devono adempiere ai tre requisiti della *non contraddittorietà*, della *sufficienza* e dell'*indipendenza*.

corrente conseguenza, espressa nei termini ' se .... allora .... '. Infatti dalla matrice risulta quanto già abbiamo detto al N. 2, che cioè l'implicazione è falsa solo quando il susseguente q è falso, a meno che non sia falso anche l'antecedente, nel qual caso risulta vera. L'indeterminazione di p e di q lascia perciò aperta la possibilità di affermazioni paradossali.

4. - Al fine di stabilire i rapporti che intercorrono tra il sistema dell'implicazione stretta di C. J. Lewis e la logica delle modalità, è indispensabile dare preliminarmente anche un cenno dei sistemi polivalenti. È chiaro che se per una proposizione elementare oltre ai due valori di verità e di falsità si ammette un terzo valore o più valori, questi sono interpretabili anche come valori modali. Così nel sistema trivalente di Łukasiewicz-Tarski si dà al terzo valore il significato di *dubbio*, come intermedio tra il vero ed il falso[8].

Mentre nella logica bivalente sono presenti solo un segno operativo monoargomentale e 16 biargomentali, nelle logiche polivalenti se ne hanno molti di più. Precisamente in un sistema trivalente si avranno $3^3 = 27$ segni monoargomentali e $3^9 = 19683$ biargomentali.

Seguendo la falsariga del sistema di J. Łukasiewicz-Tarski e di quello di Reichenbach[9] diamo le seguenti matrici trivalenti biargomentali, che sono un'estensione di quelle bivalenti:

p	q	$p \vee q$	$p \bullet q$	$p \equiv q$	$p \mid q$	$p \supset q$	$p \rightarrow q$	$p \ni\!\!- q$
1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1/2	0	1/2
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1/2	1	1	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1/2	1	1	1/2
1/2	0	1/2	0	1/2	1	1/2	1	1/2
0	1	1	0	0	1	1	1	1/2
0	1/2	1/2	0	1/2	1	1	1	1/2
0	0	0	0	1	1	1	1	1/2

8 Ricordiamo che le logiche polivalenti furono proposte da MAC COLL (1906) e POST (1921); furono sviluppate in un compiuto sistema da Łukasiewicz e Tarski (Cfr. J. ŁUKASIEWICZ: *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagen Kalküls,* Comptes rendus des séances de la société des sciences et des lettres de Varsovie, XXII (1930), classe III, 57-77.

Cfr. anche LEWIS-LANGFORD: *Symbolic Logic,* New York-London: The Century Co., 1932, pp. 213 e seg.

9 Cfr. H. REICHENBACH: *Wahrscheinlichkeitslehre,* Leiden, 1935 ed *I fondamenti della meccanica quantistica,* trad. it. di A. Caracciolo, Torino, 1954.

È di Reichenbach la distinzione delle tre implicazioni: $\supset$ ('standard'), $\rightarrow$ ('alternativa'), $\ni\!\!-$ ('quasi implicazione'). Egli tratta anche diffusamente la distinzione delle tre negazioni: diametrale, completa e ciclica. Considera inoltre come formule *tautologiche* quelle che hanno sempre valore *1, contraddittorie* quelle che hanno sempre valore 0 *e sintetiche,* cioè dipendenti dall'esperienza, quelle che hanno valori misti con almeno un *1.*

In esse ' *1* ' indica la verità, ' *2* ' la falsità ed ' *1/2* ' per Łukasiewicz dubbio e per Reichenbach indeterminato.

Si noti che eliminando i casi in cui si ha il valore *1/2*, si ritorna alle matrici del sistema bivalente. Per quel che riguarda l'implicazione $p \supset q$ vale il solito criterio che è il valore del susseguente ad essere determinante. Se il susseguente ha valore *1*, essa ha valore *1*, mentre se ha valore *0*, essa ha valore *0*. Nel caso in cui ha valore *1/2* l'implicazione ha valore *1/2*; ma nel caso in cui sia p che q hanno valore *1/2*, essa ha valore *1*. Se p ha valore *0* e q *1/2*, essa ha valore *1*. Inoltre per p *1/2* e q *0* ha valore *1/2* (e non *0*).

Citiamo inoltre le seguenti matrici monoargomentali:

p	$\sim p$	$\bar{p}$	$-p$	Tp	Mp	Dp	$\sim Dp$
1	*0*	*1/2*	*1/2*	*1/2*	*1*	*0*	*1*
1/2	*1/2*	*1*	*0*	*1/2*	*1*	*1*	*0*
0	*1*	*1*	*1*	*1/2*	*0*	*0*	*1*

ove $\sim p$ è la negazione diametrale, che corrisponde a quella bivalente, nella quale si trasforma sopprimendo il caso *1/2*. Mentre $-p$ è la negazione ciclica. Infatti stabilendo l'ordine *1*, *1/2*, *0*, essa trasforma ogni valore in quello immediatamente successivo. La Tp è il così detto funtore di Slupecki o *tertium di p*, che trasforma gli altri valori nel valore *1/2*.

Quel che a noi interessa soprattutto sottolineare è che nel calcolo di Łukasiewicz-Tarski si ha la funzione Mp, di cui abbiamo dato la matrice, che viene interpretata come la *possibilità di p*. In tal modo si introducono le modalità, che come vedremo sono intimamente collegate con l'implicazione stretta.

Risulta, precisamente, che la funzione Mp ottiene la verità da una proposizione vera oppure dubbia; cioè, come mostra la matrice, afferma che è vero che una proposizione dubbia è possibile. Infatti Mp ha valore *1* per $p = 1$ e per $p = 1/2$, mentre ha valore *0* per $p = 0$; dà quindi la verità in tutti i casi, tranne quello in cui p è falsa. Sarebbe come dire che ' è possibile che Marte sia abitato ' è vero, se ' Marte è abitato ' è vero od è dubbio; mentre è falso se non è vero che Marte è abitato.

La possibilità di p corrisponde anche alla formula $\sim p \supset p$, in quanto quest'espressione ha la stessa matrice [10].

La simbologia da me adottata non è né quella di Reichenbach, né quella di Łukasiewicz-Tarski. Quest'ultima è completamente diversa dalle altre, in quanto scrive i segni operativi prima di quelli proposizionali. Ad es. per l'implicazione: *Cpq*, per l'equivalenza: *Epq*, ecc.

Si noti che Reichenbach indica con '$\sim$' la negazione ciclica e con '—' la diametrale. Noi cambiamo invece le notazioni allo scopo di mantenere nel sistema trivalente lo stesso segno, e cioè '$\sim$', che si ha nel bivalente per la negazione corrispondente. Vedremo infatti che sopprimendo il terzo valore è la negazione diametrale che viene a corrispondere a quella del sistema bivalente.

10 Si ha infatti per $p = 0$ e quindi $\sim p = 1$: $0 \supset 1$, che come mostra la matrice dell'implicazione, ha valore *1*. Per $p = 1/2$ e quindi $\sim p = 1/2$ (Cfr. la matrice della negazione diametrale): $1/2 \supset 1/2$, che ha valore *1*. Per $p = 0$ e quindi $\sim p = 1$

Le due funzioni Dp e $\sim Dp$ ci interessano meno. Dp vale solo quando p ha il valore $1/2$, cioè significa *p è dubbio*; mentre $\sim Dp$ vale sempre tranne quando p è $1/2$, cioè significa *p non è dubbio*.

Ciò premesso si definiscono immediatamente le altre modalità. Le raccogliamo tutte nel seguente elenco:

Mp = *p è possibile*. Corrisponde a $\sim p \supset p$, matrice *110*. Vale sempre tranne quando $p = 0$. Cioè p non è certamente falsa.

$\sim Mp$ = *p è impossibile*. Corrisponde a $\sim (\sim p \supset p)$, matrice *001*. Vale solo quando $p = 0$. Cioè p è certamente falsa.

$M \sim p$ = *p è possibile falsa*. Corrisponde a $p \supset \sim p$, matrice *011*. Vale sempre tranne quando $p = 1$. Cioè p non è certamente vera.

$\sim M \sim p$ = *p è necessaria*. Corrisponde a $\sim (p \supset \sim p)$, matrice *100*. Vale solo quando $p = 1$. Cioè p è certamente vera.

Dp = *p è dubbia*. Corrisponde a $p \equiv \sim p$. Infatti per $p = 1$ risulta $1 \equiv 0 = 0$, per $p = 1/2$ risulta $1/2 \equiv 1/2 = 1$ e per $p = 0$: $0 \equiv 1 = 0$ (Cfr. la matrice dell'implicazione trivalente). Vale solo quando $p = 1/2$.

$\sim Dp$ = *p non è dubbia*. Corrisponde a $\sim (p \equiv \sim p)$. Vale sempre tranne quando $p = 1/2$.

In quanto alle leggi (tautologie) del sistema trivalente, ci limitiamo a ricordare che tutte quelle in esso valide, valgono anche nel sistema bivalente, ma non viceversa. Questo avviene in generale nei sistemi polivalenti, che per tal motivo si dicono più deboli del bivalente. Tra le leggi valide nel sistema bivalente, ma non in quello trivalente, vi è il *principio del terzo escluso*: $p \vee \sim p$. (Esso vale però per la negazione completa $p \vee \bar{p}$: *pseudo tertium non datur*).

Si possono costruire sistemi con un numero maggiore di valori, in ognuno dei quali si definiscono le varie matrici e si hanno le relative tautologie. Lewis riporta [11] la seguente matrice a cinque valori *1, 2, 3, 4, 5* di un'implicazione e di una negazione, la quale illustra un metodo dovuto a Łukasiewicz-Tarski, che può essere esteso a un sistema finito con un numero qualsiasi di valori. Riteniamo opportuno ricordarla, sebbene non interessi ai fini del calcolo delle modalità.

p	$\sim p$	1	2	3	4	5 (valori di q)
1	5	1	2	3	4	5
2	4	1	1	2	3	4
3	3	1	1	1	2	3
4	2	1	1	1	1	2
5	1	1	1	1	1	1

si ha $1 \supset 0$, che ha valore *0*. In definitiva si ha perciò la matrice *110*, che coincide con quella di Mp. Si può quindi concludere che la *possibilità di p* coincide con il dire che *non p implica p* nel sistema trivalente.

11 LEWIS-LANGFORD: *ibid.*, p. 229.

I valori di $p \supset q$ si ottengono con la seguente regola: il valore è *1* quando $q < p$ ed è $q + 1 - p$ quando $q > p$. Il valore della negazione $\sim p$ è $5 + 1 - p$. Così ad es. per $p = 3$ e $q = 4$, essendo $q > p$ si avrà il valore $4 + 1 - 3 = 2$. Con la stessa regola si possono costruire matrici con un numero maggiore di valori.

Il valore *1* significa *certamente vero* ed il *5* *certamente falso*. I valori intermedi corrispondono ad un passaggio graduale: *2* significa *più probabile anziché no*, *3* *ugualmente probabile che improbabile*, *4* *meno probabile che no*.

Considerando la matrice di $p \supset q$ risulta che essa in generale afferma che una proposizione ne implica un'altra che è ugualmente o meno probabile. Ad es. nel caso in cui $p = 3$ per $q = 5$ (certamente falso) l'implicazione ha il valore *3*, per $q = 4$ ha il valore *2*, mentre negli altri casi ha valore *1*.

Nel caso limite di due soli valori, si ottiene l'implicazione materiale del calcolo bivalente.

Le leggi in un sistema del genere si ottengono in riferimento ad uno o più *valori stabiliti per l'asseribilità*. Ad es. se si stabilisce come solo valore *1* (certamente vero), saranno leggi del sistema quelle espressioni che, qualunque siano i valori di p e di q, hanno sempre il valore *1*. Questo è il caso delle tautologie nel sistema bivalente.

Nei sistemi polivalenti di solito si considerano legittime (tautologiche) le espressioni che posseggono, oltre al valore certamente vero *1*, anche il valore *2*, cioè il vero più probabile del falso. Vedremo che anche Lewis accetta per i sistemi modali questi due valori dell'asseribilità [12].

12 F.B. Fitch: « Modal Functions in Two-valued Logic », *J.S.L.*, 2, 1937, pp. 125-128, presenta un metodo secondo cui le funzioni modali possono essere costruite nella usuale logica bivalente. In « Note on Modal Functions » (*ibid.*, 4, 3, 1939) afferma che questi risultati si prestano per una semplice rappresentazione booleana del sistema di Lewis. Affermazioni analoghe erano state fatte da Henle (Cfr. Lewis-Langford, *ibid.*, p. 492). I. C. C. Mc Kinsey (cfr. *Review* in J.S.L., 5, 1940, p. 31) nota che Fitch usa la parola 'necessità' in senso diverso da quello di Lewis. Secondo Lewis dire che p è necessario relativamente alla classe S di proposizioni, vuol dire che p non può essere falsa se tutte le proposizioni in S sono vere. Per Fitch invece vuol dire che p è vera, indipendentemente dai valori delle proposizioni in S. Della riconduzione della logica modale a matrici bivalenti si occupa anche H. S. Leonard: « Two-valued Truth for Modal Functions », in *Structure, Method and Meaning, Essays in honor of N. H. Sheffer*, New York: The Liberal Arts Press, 1951, pp. 42-67). I lavori della scuola polacca, di cui abbiamo fatto cenno, invece non solo considerano il calcolo modale come distinto dal bivalente, ma lo riconducono ad una vera e propria logica non aristotelica. Secondo J. Łukasiewicz (« Die Logik und das Grundlagenproblem », in *Les Entretiens de Zürich*, Zürich: Leemann Frères & Cie, 1938, pubblicato da F. Gonseth, pp. 82-100), il *calcolo intuizionista* di Brouwer-Weyl come formalizzato da Heyting è semplicemente un sistema *più debole* di quello corrente, nel senso che basta togliere un certo assioma tra quelli del sistema corrente, perché si passi al sistema intuizionista. Invece un calcolo modale, come quello di Łukasiewicz-Tarski richiede la sostituzione di quell'assioma con un altro. Non si tratta perciò di un sistema più debole, ma di un sistema diverso. Ricordiamo che esso fu reso sufficiente da Waisberg e da Slupecki, introducendo negli assiomi il funtore monoargomentale *Tp* di Slupecki, di cui sopra abbiamo dato la matrice. Poiché non si

5. - Passiamo ora ad occuparci dell'*implicazione stretta* di C. J. Lewis, seguendo essenzialmente l'esposizione fatta nel volume C. J. Lewis-C. H. Langford: *Symbolic Logic,* già citato.

Mentre l'implicazione materiale si può ricondurre ad una matrice bivalente, e precisamente a quella corrispondente alla serie di valori *1011,* così non è per l'implicazione stretta, per la quale si può solo asserire che per $p = 1$ e $q = 0$ è falsa. Negli altri casi risulta infatti indeterminata. Pertanto secondo Lewis mentre $\sim$, $\bullet$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, ecc. sono funzioni di verità, per le quali si possono dare le matrici, così non è per l'implicazione stretta, come pure per gli altri segni modali. (Vedremo che però nell'Appendice II del vol. cit. egli enuncia delle matrici per l'implicazione stretta e la possibilità).

Lewis introduce i seguenti simboli:

' $\prec$ ' che indica l'*implicazione stretta*;
' $\Diamond$ ' che indica la *possibilità;*
' $\sim\Diamond$ ' che indica l'*impossibilità;*
' $\Diamond\sim$ ' che indica: *non necessariamente vero;*
' $\sim\Diamond\sim$ ' che indica la *necessità;*
' $\circ$ ' che indica la *consistenza.*

Nell'esposizione seguente manteniamo la simbologia di Lewis, avvertendo che si ha la seguente corrispondenza con quella già citata di Łukasiewicz-Tarski:

$$\Diamond p = Mp, \quad \sim\Diamond p = \sim Mp, \quad \Diamond \sim p = M \sim p, \quad \sim\Diamond\sim p = \sim M \sim p$$

Come si è detto, lo scopo per cui Lewis introduce l'implicazione stretta è quello di stabilire una relazione formale, che corrisponda alla corrente conseguenza logica, dato che l'implicazione materiale, applicata ai casi della lingua corrente, conduce a paradossi. Lewis comincia con l'introdurre delle formule che possiamo chiamare limitative, nel senso che con esse si afferma che quando si ha un'implicazione stretta $p \prec q$ si ha anche un'implicazione materiale $p \supset q$, ma non viceversa. Se ad es. 'piove' implica strettamente 'la strada è bagnata', lo implicherà

può ricondurre a quello tradizionale rinforzandolo, come invece avviene per quello di Heyting, viene considerato come un sistema di logica non aristotelica. Si noti infine che mentre il sistema di Łukasiewicz-Tarski-Waisberg-Slupecki si può trattare con le matrici trivalenti, così non è per quello di Heyting, che non possiede una matrice, o meglio, come mostrarono Goedel ed Jaskowski, possiede una matrice ad infiniti valori. Nei sistemi più deboli di quello corrente si dimostra solo una parte delle tesi valide in questo. Abbiamo detto che ad es. non vale il principio del terzo escluso. Si è anche dimostrato che ogni sistema più debole del corrente deve essere trattato con una matrice a più di due valori.

Per un confronto tra la logica bivalente, quella dell'implicazione stretta di Lewis, quella intuizionista di Brouwer-Weyl-Heyting e quella polivalente di Łukasiewicz-Tarski, si cfr. anche R. Feys: « Les logiques nouvelles des modalités », *Revue néo-scolastique de philosophie,* vol. 40 (1937), pp. 517-53 e vol. 41 (1938) pp. 217-52. Per un confronto svolto secondo la tecnica della topologia degli insiemi di punti tra il calcolo modale di Lewis e quello intuizionista di Heyting, si cfr. J. C. Mc Kinsey e A. Tarski: « Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting », *J.S.L.,* 13, 1, 1948, pp. 1-17. Vengono enunciati tre teoremi che stanno alla base di un metodo per trasferire il calcolo di Heyting nel sistema di Lewis.

anche materialmente. Ma non è detto che debba avvenire anche l'opposto. Così 'il cane abbaia' implica materialmente 'la strada è bagnata' se è vero che la strada è bagnata; ma non lo implica strettamente.

Questo punto di vista viene precisato affermando anzitutto che se si ha $p \prec q$ si ha anche necessariamente $p \supset q$, cioè:

$$5.1 \qquad p \prec q . \prec . p \supset q$$

Si ottiene in tal modo una prima formula in cui figura l'implicazione stretta in rapporto con l'implicazione materiale. Il presupposto formalista è salvo, ma non sfuggirà al lettore che la distinzione è data solo in modo negativo, affermando che l'implicazione stretta non vale sempre, quando vale quella materiale. Una definizione efficiente dovrebbe essere invece positiva, cioè stabilire quando vale l'implicazione stretta. Solo così verrebbe tradotta in termini logici la corrente conseguenza.

Resta comunque chiarito che a quest'implicazione è stato dato il nome di 'stretta', poiché restringe il campo in cui si applica l'implicazione materiale. Per due qualunque proposizioni p e q, purché q sia vera, si può sempre dare l'implicazione materiale, mentre vi sono casi che devono essere esclusi perché si possa porre quella stretta. È da attendersi inoltre che il campo si possa restringere più o meno, determinando varie implicazioni e diverso grado di strettezza. Vedremo al N. 7 che effettivamente Lewis definisce cinque diversi sistemi: S1, S2, S3, S4, S5, a grado di strettezza decrescente. Implicazioni strette non valide in S1 saranno cioè valide in S2, implicazioni non valide in S2 saranno valide in S3, ecc. Tra i sistemi proposti da Lewis il meno stretto è l'S5. Esso cioè è quello che si avvicina di più al sistema dell'implicazione materiale. Nasce allora tra l'altro il quesito di stabilire quali di questi sistemi corrisponda alla corrente conseguenza. Vedremo che la risposta non è data da Lewis in modo definitivo. Su questo punto si pronuncia anche Mc Kinsey, ma le sue conclusioni sembrano poggiare su concezioni non sostenibili (N. 13).

Il fatto è che i procedimenti correnti non hanno nulla a che fare con questi sistemi formali, poiché il rapporto di conseguenza deve interessare i significati. Riservandoci di tornare nelle pagine seguenti su questo punto, diamo ora un cenno degli ulteriori sviluppi del calcolo di Lewis.

In generale si ha tutta una serie di formule che valgono quando l'implicazione subordinata è materiale, ma non quando è stretta, in ottemperanza al principio stabilito con la 5.1. Per distinguere l'implicazione stretta da quella materiale, Lewis osserva che poiché per la 2.3 al posto di $p \supset q$ si può scrivere $\sim (p \bullet \sim q)$, sarà valida la formula:

$$5.2 \qquad \sim (p \bullet \sim q) . \prec . p \supset q$$

la quale afferma semplicemente che l'implicazione materiale enunciata come $\sim (p \bullet \sim q)$ implica strettamente questa stessa implicazione enunciata come $p \supset q$. Non è invece legittima la formula:

$$\sim (p \bullet \sim q) . \prec . p \prec q$$