Quantità e numero[i]

Renzo Beltrame[ii]

Felice Accame in un precedente intervento [Accame 2018] ripercorre criticamente le definizioni di "qualità" e "quantità" così proposte nella letteratura SOI

> *«In [Ceccato and Zonta 1980, p.103] Silvio Ceccato e Bruna Zonta spiegano che la "qualità" – come risultato di operazioni mentali – è costituita da una sottrazione preceduta da una divisione. Il loro esempio è il seguente: "se dal vetro separiamo la trasparenza e la assumiamo isolatamente, ma conservandone la provenienza" il risultato è una "qualità" del vetro stesso.*
> *La "quantità", inversamente, sarebbe ottenuta da "una addizione preceduta da una moltiplicazione". E il loro esempio è il seguente: "se da un vetro, un vetro e un vetro, e così via il "quanti vetri?" ottiene la sua risposta in 'tre vetri' o 'tanti vetri'".»*

a proposito delle quali condivido le annotazioni critiche di Accame.

In particolare con riferimento alla nozione di "quantità" Accame annota l'alternativa che se

> *«leggiamo quanto scrive Bertrand Russell ne 'I principi della matematica' [Russell 1903] a pag. 238 della trad italiana – un testo pubblicato nel 1903 -, apprendendo che esistono "quantità" che "non possono venire misurate", dovremmo concluderne che "numero" e "quantità" sono "completamente indipendenti l'uno dall'altro"»*

Una alternativa che a me risulta completamente condivisibile, perché nel caso della "quantità" si ha modo di confrontare le quantità per uguale, diverso, maggiore o minore, e relazioni più complesse, senza passare attraverso numeri. Tipici esempi ci sono offerti dalla geometria.

Di questa possibilità si ha infatti un esempio notevolmente precoce nella dimostrazione che si considera più antica del teorema noto come di Pitagora, la possiamo collocare ad almeno 2500 anni da noi.

Nel teorema le quantità di partenza sono l'estensione di segmenti, e la dimostrazione usa l'equivalenza tra l'estensione di superfici derivate da queste.

Nella dimostrazione non intervengono numeri, né potevano intervenire dal momento che si sarebbe dovuto coinvolgere la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, che non è sempre individuabile con un numero razionale impiegando la stessa unità di misura usata per i cateti.

La dimostrazione si avvaleva quindi delle figure riportate in Fig. 1 a pag. 1

Si parte da un quadrato nei cui lati si pone ciclicamente una stessa suddivisione in due parti a e b,

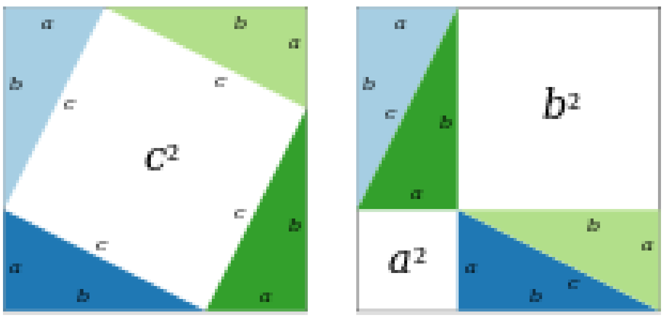

Figura 1: L'antica dimostrazione del teorema di Pitagora.

i. *Methodologia Online* [http://www.methodologia.it] - Working Papers - WP 336 - 2019

ii. National Research Council of Italy - Pisa Research Campus - Via Moruzzi 1, 56124 PISA - Italy
email: renzo.beltrame@isti.cnr.it

che vengono interpretate come l'estensione di due cateti di un triangolo rettangolo.

Nella prima figura si tracciano quattro segmenti che congiungono i punti di suddivisione dei quattro lati del quadrato di partenza.

Questi segmenti hanno l'estensione dell'ipotenusa c del triangolo rettangolo di cateti a e b. A determinarla non interviene alcuna misura, alcun numero: solo la costruzione dei quattro triangoli uguali, hanno infatti uguali due lati e l'angolo compreso.

Il quadrato inscritto in quello di partenza ha quindi, per come è costruita la figura, l'estensione di un quadrato costruito sull'ipotenusa del triangolo a b c.

La seconda figura è ottenuta congiungendo i punti di suddivisione del quadrato di partenza con due segmenti uno verticale ed uno orizzontale. E si ottengono due quadrati e due rettangoli.

I due quadrati hanno, sempre per costruzione, il lato esteso rispettivamente quanto i due cateti a e b del triangolo. E se si traccia una diagonale nei due rettangoli, si ottengono quattro triangoli uguali a quelli della prima figura.

In conclusione, se da una medesima estensione si tolgono le medesime quattro estensioni, quelle dei triangoli, si ottiene nei due casi una medesima estensione.

Nel primo caso è quella del quadrato che ha il lato esteso quanto l'ipotenusa del triangolo rettangolo.

Nel secondo caso è quella di due quadrati che hanno il lato esteso rispettivamente quanto i cateti del medesimo triangolo rettangolo.
Di qui la tesi

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1}$$

In tutta la costruzione e nel ragionamento conclusivo non intervengono numeri. E la dimostrazione ha una generalità totale: richiede solo che si tratti di un triangolo rettangolo.

Di solito, tacitamente, si suppone che la misura dei cateti sia un numero intero, e in questo caso la notazione c^2 nella relazione (1) a pag. 2 non può venir interpretata sempre in modo aritmetico, perché non tutti i numeri interi sono quadrati di un numero intero. Lo sono quando hanno come componenti soltanto doppi moltiplicatori.[1]

Se la misura dell'ipotenusa c e di un cateto a è espressa da numeri interi, è la notazione b^2 a non poter essere sempre interpretata in modo aritmetico. Ma il teorema continua a valere anche se la lunghezza di tutti i tre lati di un triangolo rettangolo non è espressa da numeri interi o frazioni.

In generale, quindi, la relazione (1) a pag. 2 descrive un rapporto tra quantità, le quantità di cui sono estesi i lati del triangolo rettangolo, e il rapporto è descritto facendo intervenire tre quantità legate a queste: l'estensione di tre quadrati che le hanno come lati.

Il teorema di Pitagora propone allora una chiara e molto precoce distinzione tra quelle che oggi chiamiamo analisi matematica e calcolo. Con l'analisi che spesso si svolge sul continuo, senza cioè la discretizzazione che comportano i numeri interi.

Il teorema è quindi da ascrivere all'analisi matematica, e non al calcolo.[2]

Il secondo schema di Fig. 1 a pag. 1 dimostra anche la relazione

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{2}$$

Questo effetto secondario della dimostrazione è abbastanza sorprendente perché non mette in gioco un triangolo rettangolo, e a prima vista sembra una relazione tra numeri e quindi riguardare il calcolo.

Ma la cosa è vera solo quando a e b sono numeri interi o frazioni, e non vale ad esempio per la relazione

$$\left(3+\sqrt{2}\right)^2 = 9+2+6\sqrt{2} = 11+6\sqrt{2}$$

dove torna a presentarsi come una relazione tra quantità.

Quantità e sua misura

Il teorema di Pitagora quando l'estensione dei cateti è indicata da numeri interi porta ad avere l'estensione del quadrato sull'ipotenusa indicata da un numero intero, ma non in generale l'estensione dell'ipotenusa.

Vi sono terne di numeri interi, ad esempio (3,4,5), che possono individuare la misura di cateti e ipotenusa di un triangolo rettangolo. Erano note ai babilonesi più di un migliaio di anni prima della dimostrazione del teorema di Pitagora e sono state successivamente chiamate *terne pitagoriche*. Ma sono relativamente rare.

I babilonesi risolvevano anche equazioni di secondo grado ed avevano quindi sviluppato metodi per calcolare un valore approssimato della radice quadrata di un numero intero.

La dimostrazione del teorema di Pitagora si inserì dunque in un contesto nel quale avevano un articolato sviluppo la quantità, la sua misura, e l'approssimazione di questa quando la quantità non era misurabile da un numero intero o frazionario.

La situazione attuale ha quindi una storia plurimillenaria, compreso il fatto che una utile relazione matematica tra le tre quantità è dimostrata anche in assenza di misurabilità.

La presenza storica di una nozione di approssimazione e metodi utili in situazioni particolari, ha portato all'invenzione di un meccanismo di carattere generale.

Si prende una successione $x_1, x_2, x_3, \ldots$ di numeri razionali, cioè interi e/o frazionari, positivi, che soddisfi la seguente condizione.
Per qualsiasi numero via via più piccolo $\varepsilon > 0$ si ha un punto della successione, che indichiamo con l'indice N, a partire dal quale le differenze tra gli elementi della successione sono più piccole del numero scelto, formalmente quindi

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \text{per} \quad m, n > N$$

Sequenze con queste caratteristiche (successioni di Cauchy) danno intuitivamente l'idea di una convergenza perché la differenza tra due successivi elementi diminuisce progressivamente.

Due successioni $x_1, x_2, x_3, \ldots$ e $y_1, y_2, y_3, \ldots$ per le quali, nelle stesse condizioni viste in precedenza, vale anche la relazione

$$|x_m - y_n| < \varepsilon \quad \text{per} \quad m, n > N$$

sono poi legate da una relazione di equivalenza (valgono le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva), per cui tra le successioni che soddisfano questa seconda condizione se ne può scegliere una al posto di tutte le altre.

Un esempio: nel caso della diagonale di un quadrato riferita al lato interviene una quantità indicata con $\sqrt{2}$. Si può allora iniziare la successione con il maggiore numero intero il cui quadrato non superi 2, cioè con 1.

Per il secondo termine si cerca la maggior cifra decimale n tale che il quadrato di 1, n sia minore di 2, ottenendo 1,4.

Si procede poi allo stesso modo per le successive cifre decimali ottenendo ogni volta un termine della successione da cui i successivi si scosteranno di centesimi, millesimi, decimillesimi, e così via.[3]

Un altro metodo assai diffuso si appoggia agli sviluppi in serie, cioè a sommatorie, convergenti. I termini della successione sono in questo caso le somme parziali di un numero via via crescente di termini della serie.[4]

Per i ragionamenti di analisi matematica si impiegano allora le proprietà della successione viste in precedenza, e insieme la relazione che caratterizza la particolare successione.

Dalla successione si può poi scegliere come approssimazione un elemento con indice m maggiore di un indice N a cui è associato un ε sufficiente per la precisione del calcolo: gli scostamenti dei successivi elementi della successione sono infatti inferiori al valore del ε.

E si è così nel calcolo con una approssimazione che può essere spinta al livello voluto.

La ragione di introdurre questo meccanismo generale basato sulle successioni, che definisce quelli che sono stati chiamati *numeri reali*, è esemplificata dal teorema di Pitagora: la relazione (1) a pag. 2 non è gestibile nel dominio dei numeri interi e frazionari perché presenta continue eccezioni.

Più in generale, il dominio dei numeri razionali si rivela non adatto a gestire e a sviluppare situazioni nelle quali intervengono quantità che possono variare con continuità. La trigonometria e le equazioni ordinarie e differenziali ne offrono notevoli esempi.[5]

Diventa quindi del tutto ragionevole una distinzione tra quantità e misura. Si pongono relazioni che intercorrono fra quantità, lasciando a una teoria della misura la trattazione di come collegare una quantità al calcolo.

Sulla definizione di quantità

Parlare di addizione e moltiplicazione per l'attività mentale costitutiva di "quantità" come in [Ceccato and Zonta 1980], va ad implicare la nozione di numero . È inoltre discutibile che la nozione di "tanti" comporti il numero, se non, forse, nella descrizione delle dipendenze del suo uso in rapporto a quello di "qualche".

Ala luce del quadro delineato in precedenza risulta più convincente sostituire la ripetizione alla moltiplicazione, e avere quindi una addizione preceduta dalla ripetizione, in modo da evitare, sia l'assumere come unità il moltiplicando, sia il contare, implicito nel moltiplicatore.

L'idea di introdurre la ripetizione trova un possibile riscontro nella quantità di terra con cui si riempie un vaso, o di acqua con cui si riempie una vasca.

Il numero intero sembra a volte implicato nella quantità, ad esempio in "una quantità di matite", quando la quantità riguarda oggetti fra loro staccati, per cui estenderla o ridurla porta a cambiare di unità il numero di oggetti.

Del resto si tratta di casi che si accordano con la discretizzazione che nell'approccio dalla SOI è posta per definizione alla base del mentale, dal momento che all'attenzione si è data l'ulteriore funzione di frammentare l'attività.

Allora le riflessioni svolte in questo breve scritto aggiungono anche elementi a favore di una maggior ampiezza dei modi del mentale. Possono come si è visto coinvolgere la continuità, e altri esempi sono offerti dal movimento e dalla melodia in musica [Beltrame 2015].

Note

1. L'annotazione si trasferisce tal quale se si usano frazioni, perché basta ridurle allo stesso denominatore e ragionare sui numeratori.

2. Il calcolo può essere visto come una serie di regole che sostituiscono in modo rigido agli operandi di un'operazione il risultato, tanto rigido da poter essere fatto con l'aiuto di tavole che danno questa sostituzione per le singole cifre degli operandi.

3. Questo aspetto era stato discusso anche in [Beltrame 2006].

4. Un classico esempio è offerto dagli sviluppi in serie di Maclaurin delle funzioni trigonometriche.

5. Ciò accade, in sostanza, perché i numeri razionali introducono discretizzazione a somiglianza dei numeri interi. Si tenga infatti presente che dal punto di vista della topologia generale, lo spazio dei numeri razionali risulta totalmente sconnesso.

Riferimenti bibliografici

F. Accame. Quantità e qualità, quanto basta. *Methodologia Online - WP*, 332, 2018. ISSN 1120-3854.

R. Beltrame. Sui numeri reali. *Methodologia Online - WP*, 186, 2006. ISSN 1120-3854.

R. Beltrame. Sul modo mentale sotteso alla melodia. *Methodologia Online - WP*, 296:7 pp., 2015. ISSN 1120-3854.

S. Ceccato and B. Zonta. *Linguaggio, consapevolezza, pensiero*. Feltrinelli, 1980.

B. Russell. *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press, 1903. trad. It. "I principi della matematca", Longanesi, Milano 1963 (L. Geymonat).