Methodologia

Working Papers #186

Notizie

Sui numeri reali
di Renzo Beltrame

La struttura dell'atomo
di Giuseppe Vaccarino

Methodologia
Pensiero Linguaggio Modelli

a cura della
Società di cultura metodologico-operativa

www.methodologia.it

Notizie

- È convocata per venerdì 3 marzo 2006 alle ore 21.15 presso la libreria "Odradek" (via Principe Eugenio, 28 - Milano) l'assemblea annuale ordinaria della Società di Cultura Metodologico-Operativa con il seguente ordine del giorno:
    1. relazione del Tesoriere,
    2. relazione del Presidente,
    3. rinnovo delle cariche sociali,
    4. varie ed eventuali.

  Per partecipare all'assemblea è necessario essere in regola con la quota del 2004. L'importo di 150 euro va pagato preferibilmente mediante bonifico bancario sul C.C. 12467.50 presso il Monte dei Paschi di Siena ag. 4 di Milano, Via Canova 35, (CAB 16048 - ABI 1030) intestato a Società di Cultura Metodologico-Operativa, oppure mediante assegno bancario non trasferibile (intestato alla SCM-O) da inviare direttamente al tesoriere Carlo Oliva - Via Melzi d'Eril, 25 - 20154 Milano.

- Si ricorda a chi non ha ancora rinnovato l'abbonamento ai Working Papers per l'anno 2006 che la quota di 20 euro va inviata - o in francobolli (da 0,45 euro) o tramite assegno non trasferibile a Nello Costanzo - Via Lazzaro Palazzi, 19 - 20124 Milano.

Sui numeri reali[1]

Renzo Beltrame

La questione dei numeri reali ha una certa tradizione negli scritti della Scuola Operativa Italiana. Troviamo una definizione operativa di numero e delle operazioni aritmetiche in termini di categorie mentali sia in Ceccato che in Vaccarino, con differenze nella notazione e nella definizione delle operazioni aritmetiche, ma con l'identica conclusione che le definizioni proposte reggono fino a che ci si limita ai numeri interi e alle frazioni; in linguaggio matematico ai numeri razionali.

Vaccarino sostiene infatti che "sarebbe preferibile parlare invece che dei pretesi numeri e, π, ecc. di procedimenti di *eizzazione*, di *pigrechizzazione*, ecc."[2].

D'altra parte, e come è noto, il problema di quelli che oggi vengono chiamati numeri reali ha una prima formulazione nella scuola Pitagorica, attraverso la constatazione che il rapporto tra lato e diagonale di un quadrato non è esprimibile come rapporto tra numeri interi; in termini moderni: non è esprimibile mediante un numero razionale.
Vale la pena richiamarne una dimostrazione, peraltro estremamente semplice.

Si può osservare che la diagonale di un quadrato può essere considerata anche come ipotenusa di un triangolo rettangolo con cateti uguali.
Applicando il teorema di Pitagora a tale triangolo, e assumendo come unità di misura la lunghezza di un cateto, che viene quindi ad avere misura 1, si ha:

$$1^2 + 1^2 = 2$$

e non esiste un numero intero il cui quadrato sia 2 (i quadrati dei numeri interi sono infatti 1, 4, 9, 16, ...), per cui il rapporto tra lunghezza del lato (cateto) e quella della diagonale (ipotenusa) non è esprimibile come rapporto tra due numeri interi.
È abbastanza immediato dimostrare che la conclusione è indipendente dalla scelta dell'unità di misura. Supponiamo infatti che la lunghezza del lato sia caratterizzata dal numero intero N. Per ipotesi deve essere un numero intero perché vogliamo provare se il rapporto tra la lunghezza del lato e quella della diagonale di un quadrato sia esprimibile come rapporto tra due numeri interi; e scegliendo N molto grande possiamo vedere se ha qualche effetto la scelta di un'unità di misura molto più piccola della lunghezza del lato. Si ha:

$$N^2 + N^2 = 2N^2$$

e ritroviamo un fattore 2, che deriva dalla somma e che impedisce di avere il quadrato della lunghezza della diagonale espresso come prodotto di quadrati di numeri interi; da cui la conclusione vista in precedenza.
Vale anche la conclusione inversa, quantunque la dimostrazione risulti un poco più laboriosa. Se si usa un'unità di misura con cui la lunghezza della diagonale è espressa da un numero intero, la lunghezza del lato non può venir espressa in generale da un numero intero di sottomultipli della medesima unità di misura.

Rammento soltanto che un'analoga conclusione vale per il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo raggio, mettendo in crisi una semplice definizione di misura di un angolo. Per definire

[1] Methodologia on line (http://www.methodologia.it) - Working Papers - WP 186 - Gennaio 2006
[2] Vaccarino G., *Prolegomeni*, Vol.I, p.237.

l'ampiezza di un angolo, è infatti ragionevole ed immediato pensare l'angolo come angolo al centro di un cerchio e definirne la misura come rapporto tra il raggio e la lunghezza dell'arco sotteso.

La misura della lunghezza di un segmento è di grande rilevanza in geometria, e il problema di lunghezze che non sono individuabili con numeri razionali diventava assai serio, a prescindere dalle implicazioni filosofico-religiose che esso aveva nella scuola pitagorica.
Abbiamo infatti dimostrato che non risulta possibile esprimere la lunghezza di tutti i segmenti di interesse per la geometria come un numero intero di sottomultipli della lunghezza di uno stesso segmento: quindi di un'unica unità di misura. E questo poneva il problema di trovare un modo di definire la misura della lunghezza di un segmento in modo che questa valga senza eccezioni per tutti i segmenti di interesse della geometria impiegando un'unica unità di misura.

La soluzione in uso che a me sembra preferibile[3] introduce un ulteriore schema categoriale. Si richiede infatti di costruire due successioni di numeri razionali con requisiti che vedremo immediatamente.
Per costruire una successione di numeri razionali occorre:

a. considerare la sequenza dei numeri interi 1, 2, 3, 4, 5, ... come un ordinamento;
b. stabilire una corrispondenza biunivoca tra ognuno degli elementi della successione e uno dei numeri interi; in tale schema, questi ultimi sono di solito detti indice dell'elemento nella successione.

Le due successioni debbono poi soddisfare i seguenti requisiti:

1. sono entrambe definite sull'insieme dei numeri interi e impiegano numeri razionali positivi[4];
2. una deve avere termini tutti minori di quelli dell'altra;
3. la differenza tra i termini dello stesso ordine nelle due successioni deve sistematicamente diminuire man mano che si procede nelle sequenze[5].

Và sottolineato che non è stabilito nella definizione il modo di costruire le due sequenze, ed effettivamente sono in uso modi diversi. Di conseguenza sono stati messi a punto criteri per dichiarare equivalenti sequenze costruite con metodi diversi.

Prima di proseguire con considerazioni di carattere metodologico su questo schema categoriale vale forse la pena vederne alcune applicazioni.
Propongo come primo esempio la costruzione delle due successioni per la radice quadrata di 2, scegliendo di procedere per decimali successivi.

Cerchiamo l'intero più grande il cui quadrato sia minore di 2: chiaramente 1. L'intero successivo, 2, ha quadrato maggiore di 2, appunto 4.
Passiamo ora ai decimi: 1,4 ha quadrato 1,96, quindi minore di 2; il successivo, 1,5, ha quadrato 2,25, quindi maggiore di 2; e così di seguito per i centesimi, i millesimi, ...
La tabella sottostante riporta i primi elementi delle sequenze di questi risultati: nelle righe centrali i valori scelti, nelle righe esterne i relativi quadrati

$$\begin{array}{llllll}
1 & 1,96 & 1,9881 & 1,999396 & 1,99996164 & \dots \\
1 & 1,4 & 1,41 & 1,414 & 1,4142 & \dots \\
2 & 1,5 & 1,42 & 1,415 & 1,4143 & \dots \\
4 & 2.25 & 2,0164 & 2,002225 & 2,00024449 & \dots
\end{array}$$

e le successioni delle due righe centrali sono assunte definire la radice quadrata di 2.
Questa entità non ha ovviamente una rappresentazione come numero decimale, o in altra base; si ricorre quindi ad un simbolo e sappiamo che una notazione in uso è $\sqrt{2}$.

[3] L'ho appresa durante il corso di Analisi I.

[4] I numeri reali negativi saranno ottenuti da questi impiegando le stesse convenzioni usate per i numeri interi.

[5] Tecnicamente si richiede che prefissato un valore per tale differenza si trovi un indice a partire dal quale la differenza tra gli elementi con lo stesso indice nelle due sequenze sia minore del valore prefissato.

I termini delle due sequenze nelle righe centrali sono anche detti approssimazioni successive, rispettivamente per difetto e per eccesso, di $\sqrt{2}$; ma non intendo forzare questo aspetto anche se ha notevole rilevanza pratica.

Chiaramente, si possono utilizzare frazioni invece che decimali, e si ottiene:

1	$49/25$	$19881/10000$	$1,999396$	$1,99996164$	…
1	$7/5$	$141/100$	$1,414$	$1,4142$	…
2	$3/2$	$71/50$	$1,415$	$1,4143$	…
4	$9/4$	$5041/2500$	$2,002225$	$2,00024449$	…

dove ho limitato ai primi termini la più laboriosa rappresentazione mediante frazioni.

Nella tabella che segue è abbastanza immediato riconoscere un modo di definire la radice quadrata di 3, notata anche $\sqrt{3}$.

1	$2,89$	$2,9929$	$2,999824$	$2,999824$	…
1	$1,7$	$1,73$	$1,732$	$1,7320$	…
2	$1,8$	$1,74$	$1,733$	$1,7321$	…
4	$3,24$	$3,0276$	$3,003289$	$3,00017041$	…

Alla notazione $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ si fa' corrispondere la coppia di successioni:

$1+1$	$1,4+1,7$	$1,41+1,73$	$1,414+1,732$	…
$2+2$	$1,5+1,8$	$1,42+1,74$	$1,415+1,733$	…

La notazione $2+\sqrt{2}$, definita dalle due successioni:

$2+1$	$2+1,4$	$2+1,41$	$2+1,414$	$2+1,4142$	…
$2+2$	$2+1,5$	$2+1,42$	$2+1,415$	$2+1,4143$	…

è una definizione del tutto ragionevole dell'aggiunta di 2 a $\sqrt{2}$, perché trasla di due unità tutto il procedimento visto per $\sqrt{2}$.
E analogamente per il prodotto $3\sqrt{2}$, a cui si fanno corrispondere:

9	$17,64$	$17,8929$	$17,994564$	…
3×1	$3\times 1,4$	$3\times 1,41$	$3\times 1,414$	…
3×2	$3\times 1,5$	$3\times 1,42$	$3\times 1,415$	…
36	20.25	$18,1476$	$18,020025$	…

e si vede anche che le due righe esterne, dei quadrati, convergono a 18, giustificando l'uguaglianza:

$$3\sqrt{2}=\sqrt{2\times 9}=\sqrt{18}$$

Potremmo continuare su questa linea e mostrare che le operazioni definite in aritmetica sui numeri interi e frazionari (i numeri razionali), possono venir definite tra queste nuove entità e tra esse e i numeri razionali in modo che sussistano le stesse proprietà che tali operazioni avevano quando gli operandi erano numeri razionali. In matematica, è invalso l'uso di chiamare questo procedimento estensione di operazioni ad un più vasto dominio di operandi.

Se utilizziamo la rappresentazione dei numeri decimali come ascisse su una semiretta, diventa immediatamente evidente una interessante proprietà dello schema categoriale introdotto.
Prendiamo le due sequenze con cui abbiamo definito $\sqrt{2}$:

1	$1,4$	$1,41$	$1,414$	$1,4142$	…
2	$1,5$	$1,42$	$1,415$	$1,4143$	…

Le coppie di valori corrispondenti nell'ordinamento delle due successioni

$$1 \quad 1,4 \quad 1,41 \quad 1,414 \quad 1,4142 \quad \dots \quad 1,4143 \quad 1,415 \quad 1,42 \quad 1,5 \quad 2$$

individuano segmenti sempre più corti che sono contenuti entro tutti gli analoghi segmenti definiti in precedenza.

Lo schema categoriale indicato può pertanto definire operativamente l'applicazione della categoria di convergenza al dominio dei numeri razionali[6]. E ciò che in matematica viene comunemente indicato numero reale viene allora ad essere definito da una convergenza nel dominio dei numeri razionali.
D'altra parte abbiamo visto che esiste un modo di estendere alle nuove entità le operazioni aritmetiche definite sui numeri interi e frazionari, e questa è considerata una buona ragione per chiamare numeri anche queste nuove entità, sopratutto perché sono possibili operandi misti. Ma ciò non autorizza ovviamente ad estendere l'analogia ad altri criteri o concettualizzazioni.

È del tutto ragionevole e corretto porre il problema di quando due delle convergenze definite in precedenza definiscano entità differenti oppure una stessa entità, siano cioè da questo punto di vista equivalenti. Ed inoltre, in analogia con quanto si fa sui numeri interi e frazionari, possiamo proporci di stabilire relazioni di maggiore e minore tra le nuove entità definite. Le dimostrazioni sono spesso non immediate. Qui accenno, come esempio, ad un criterio in base al quale è possibile affermare che un numero reale è maggiore di un altro. Da esso diventa immediatamente evidente un aspetto metodologico comune ai ragionamenti sui numeri reali.

Nel caso delle frazioni, e quindi dei numeri razionali, si era immediatamente ricondotti al caso dei numeri interi utilizzando l'equivalenza:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \equiv ad > cb$$

che integra e generalizza il procedimento di ispezione delle cifre che rappresentano i due numeri in una stessa base, tipicamente le cifre decimali. L'equivalenza, infatti, è molto utile nel caso di numeri razionali che sono rappresentati da numeri decimali periodici, in cui è disagevole procedere per ispezione, ed ha un'interessante immediata interpretazione geometrica[7].

Nel caso dei numeri reali un criterio generale è dimostrare che, a partire da un certo punto nelle successioni, gli elementi della successione che approssima per eccesso uno dei due sono inferiori a quelli della successione che approssima l'altro per difetto. In tal caso possiamo concludere che il primo è minore dell'altro.

Ovviamente non è possibile procedere per ispezione sui numeri razionali delle due successioni, perché si richiederebbe di continuare a confrontare (il cosiddetto numero infinito di confronti). Occorre invece provare l'assunto impiegando le proprietà costitutive delle particolari successioni in gioco.
Come si può vedere confrontando la successione che definisce $\sqrt{2}$

$$\begin{array}{llllll} 1 & 1,4 & 1,41 & 1,414 & 1,4142 & \dots \\ 2 & 1,5 & 1,42 & 1,415 & 1,4143 & \dots \end{array}$$

e quella che definisce $0,001 + \sqrt{2}$

$$\begin{array}{llllll} 1,001 & 1,401 & 1,411 & 1,415 & 1,4152 & \dots \\ 2,001 & 1,501 & 1,421 & 1,416 & 1,4153 & \dots \end{array}$$

[6] In matematica è invalso l'uso di definire la nozione di convergenza con riferimento ad una sola successione. La relativa definizione generale, apparentemente più sintetica, risulta a mio avviso concettualmente meno limpida, soprattutto nel discuterne le conseguenze.

[7] Assumiamo che ciascuna frazione, ad esempio $\frac{a}{b}$, rappresenti la lunghezza di un segmento, dove a è il numero di sottomultipli $1/b$ dell'unità di misura con cui si misura il segmento. Il secondo membro dell'equivalenza esprime semplicemente il confronto delle lunghezze dei due segmenti secondo un comune sottomultiplo dell'unità di misura

il criterio è soddisfatto solo a partire dal quinto termine, mentre nei precedenti vale la condizione inversa. Avendo poi impiegato successioni rigorosamente monotone (solo crescenti o solo decrescenti), questa proprietà costitutiva delle due successioni ci permette di concludere che la condizione è soddisfatta per i successivi termini. Ovviamente, quanto più i due numeri reali sono vicini tanto più lontano nelle successioni il criterio comincia ad essere soddisfatto, e questo rende spesso la dimostrazione meno immediata di quella esemplificata.
Come si vede, non basta più far intervenire le proprietà costitutive di due numeri come nel caso dei numeri interi, ma bisogna far intervenire anche le proprietà costitutive del modo di generare successioni di quanti si voglia numeri, cioè le proprietà di entità che in matematica sono dette funzioni. Successioni come quelle che abbiamo usato in precedenza possono venir infatti considerate funzioni definite sul dominio dei numeri interi.

Concludo questa rapida scorsa di una maniera di definire i numeri reali sottolineando alcuni punti a mio giudizio salienti sotto il profilo metodologico.

In maniera intuitiva ma in parte imprecisa, potremmo dire che il modo di definire i numeri reali che abbiamo delineato li individua tramite una successione di intervalli tra numeri razionali ciascuno contenuto nel precedente e via via più piccolo. Nella rappresentazione geometrica, gli intervalli diventano una successione di segmenti sempre più piccoli su una semiretta e ciascuno è contenuto in tutti i precedenti.
Ne consegue che, se si associano i numeri razionali a punti su una retta, ci si contraddice quando si pretenda di associare a punti su una retta anche i numeri reali: perché un numero reale è costituito da una successione di intervalli tra numeri razionali e a questi corrispondono segmenti sulla retta e non punti[8].

Questo fatto sembra una limitazione inaccettabile perché non è contraddittorio proporsi di dimostrare se un numero razionale sia maggiore o minore di un numero reale.
Infatti un criterio ragionevole per affermare che un numero razionale è minore di un numero reale può essere l'analogo di quello proposto in precedenza per i numeri reali: dimostrare cioè che esso è sistematicamente inferiore ai numeri razionali che da un certo punto in poi costituiscono la successione degli estremi inferiori degli intervalli che definiscono il numero reale.
È però sintomatico che non si possa estendere ai numeri reali una proprietà dei numeri razionali che riguarda l'uguaglianza. Si prova infatti immediatamente che, scelti due numeri razionali, esistono due numeri interi tali che:

$$m\frac{a}{b} = n\frac{c}{d}$$

perché basta prendere $m = cb$ ed $n = ad$ per provare l'assunto.
Ma nel caso dei numeri reali questa proprietà non sussiste: si può solo rendere la loro differenza piccola quanto si vuole[9]. E la cosa non stupisce affatto quando si consideri che, considerando i numeri razionali misura della lunghezza di segmenti, la relazione vista in precedenza diventa una verifica che esiste un'unità di misura con cui la lunghezza dei due segmenti è espressa da numeri interi: una condizione che, come abbiamo, non vale in generale per i numeri reali.

Un altro punto che desidero sottolineare consegue dalla presenza tra gli elementi costitutivi di numero reale di due funzioni definite sull'insieme dei numeri interi e tra loro interrelate[10]. Le definizioni delle

[8]Non stupisce che la cosa abbia ripercussioni anche sull'insiemistica. È stato infatti dimostrato che l'ipotesi del continuo di Cantor (un insieme infinito è isomorfo o all'insieme dei numeri interi oppure a quello dei numeri reali) deve essere aggiunto come assioma indipendente al sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel che è forse il più usato in insiemistica. La dimostrazione è in Cohen P., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York, 1966. Ne discende che le dimostrazioni appoggiate ai numeri interi o ai numeri reali non possono venir trasferite dall'uno all'altro dominio senza verificare se vi abbia rilevanza questo carattere assiomatico dell'ipotesi del continuo.

[9]Si dimostra infatti che dati due numeri reali, λ e μ, e un numero intero k, esistono due interi m_k ed n_k per cui vale la relazione $|m_k\lambda - n_k\mu| < \frac{1}{k}$.

[10]Ad esempio, tornando al caso di $\sqrt{2}$ che abbiamo visto in precedenza, la funzione che è usata per individuare l'estremo inferiore dell'intervallo nella successione, al numero intero n che indicizza il termine della successione, associa un numero

operazioni con i numeri reali e le dimostrazioni che li coinvolgono utilizzeranno poi questi caratteri costitutivi insieme a quelli degli elementi, numeri interi e razionali, che vi sono coinvolti[11].
Anche le definizioni delle operazioni con i numeri interi e frazionari e le dimostrazioni che li coinvolgono utilizzano i loro caratteri costitutivi. Nel caso dei numeri interi pensati come numeri cardinali utilizzano i caratteri delle collezioni con cui sono costituiti, e nel caso di operazioni con le frazioni vi aggiungono i modi di ricondurle ad operazioni tra numeri interi.
Ma la presenza, tra gli elementi costitutivi dei numeri reali, di funzioni definite sull'insieme dei numeri interi introduce un ulteriore schema categoriale, la convergenza, e questo richiede metodi aggiuntivi che segnano il passaggio dall'aritmetica all'analisi matematica.

Chiudo con un cenno veloce ad un aspetto che ha notevole rilevanza pratica oltre che concettuale.
È consuetudine utilizzare nei calcoli con numeri reali un numero decimale, scelto di solito tra quelli delle successioni viste in precedenza.
Se, però, si pongono problemi di precisione dei calcoli in cui intervengono numeri reali oppure si vogliono paragonare fra loro risultati di istanze diverse di uno stesso calcolo, occorre far riferimento all'insieme di teoremi raggruppati nel capitolo 'calcolo con dati approssimati', dove si stima appunto il range (indicato anche approssimazione o errore) con cui accompagnare il risultato di un'operazione aritmetica a partire dalla stima dell'analogo range che accompagna gli operandi. Nel nostro caso quest'ultimo è di solito una unità dell'ultima cifra decimale del numero razionale scelto.
Tuttavia, questo modo di operare, se ha grandissima rilevanza pratica, contribuisce non poco ad oscurare la sostanziale differenza della struttura matematica dei numeri razionali e dei numeri reali.

---

decimale positivo con $n-1$ cifre dopo la virgola, tale che il suo quadrato sia minore di 2 e che il quadrato del numero ottenuto aggiungendo un'unità all'ultima cifra decimale sia invece maggiore di 2. Quest'ultimo viene a sua volta associato allo stesso indice n dall'altra funzione correlata: la funzione usata per individuare l'estremo superiore dell'intervallo. Sottolineo che non si elencano i termini posti in corrispondenza dalla funzione, ma se ne danno i caratteri costitutivi.

[11] E ricordo che un intervallo nel dominio dei numeri razionali ha una struttura matematica molto ricca di proprietà.

Questo lavoro di Giuseppe Vaccarino è tratto dalla raccolta
"SAGGI 2005"

LA STRUTTURA DELL'ATOMO

La vecchia teoria atomica riteneva, in base al presupposto filosofico del realismo, che l'indivisibilità dell'atomo fosse"naturale" e quindi in nessun modo esso fosse riconducibile a costituenti. Ma questo era un dogma che fu smentito. L'indivisibilità era semplicemente relativa a certe tecniche ed in particolare quelle di cui si avvaleva la chimica.

Dopo che l'atomo risultò divisibile il pregiudizio realista rimase nei riguardi dei suoi costituenti, cioè si ritenne che devono esistere entità fisiche primarie a cui la divisione deve arrestarsi, da essere considerate come i veri atomi anche se non furono chiamate così, essendo stato il nome impegnato con i protagonisti dei fenomeni chimici. Si parlò perciò di particelle subatomiche. Purtroppo, mentre per il tradizionale atomo l'errore realista non ebbe conseguenze nagative sul piano tecnico, tanto che la chimica fece enormi progressi. Oora le cose erano ben diverse perché si commise l'errore di assumere *categorie* (cioè costrutti mentali) come *osservati*.

Dobbiamo anzitutto notare che era tanto radicata la convinzione che l'atomo chimico fosse indivisibile che gli scienziati non sentirono l'esigenza di indagare in qualche modo se avesse dei costituenti . La sua divisibilità si presentò da sé, destando una vivissima sorpresa. Si tratta della radioattività che venne fuori per caso quando Becquerel notò che un minerale, la pecblenda, impressionava al buio una lastra fotografica. Le ulteriori ricerche portate avanti dai coniugi Curie spiegarono che il fenomeno era la conseguenza della decomposizione spontanea di certi atomi, da essere collegata con l'essere essi molto complessi. Si aveva un nuovo fenomenio fisico per il quale il concetto chimico che nei fenomeni nulla si crea e nulla si distrugge veniva smentito. Infatti non solo l'atomo di un elemento radioattivo si trasformava in un altro elemento, ma scompariva una parte del suo peso. Questo riconoscimento porterà all'energia atomica in quanto la perdita di peso corrisponde alla trasformazione di materia in energia.

Mentre nell'ambito della chimica in effetti si avevano fenomeni riconducibili ad"atomi" comportantisi come costituenti ultimi di tutte le cose e che avevano un peso fisso per ogni elemento, determinabile sperimentalmente, ora certi atomi, precisamente quelli delle sostanze radioattive, risultavano composti di ingredienti più piccoli e si doveva ammettere che questo concetto valesse anche per le sostanze stabili. Le preoccupazioni dapprima non furono eccessive perché i fisici ritenevano che invece degli atomi della chimica il ruolo di veri atomi passasse ai loro costituenti.

Spiegando l'invisibilità con le dimensioni piccolissime si ammette implicitamente che perfezionando l'organo della vista, ad esempio con un supermicroscopio od altrimenti, si debba vederli. Ma ciò può avvenire solo quando ci si rivolge a cose fisiche a cui vengono applicate categorie mentali e si vedono le cose ma non le categorie. E lo scienziato spesso non distingue adeguatamente il fisico dal mentale. Poiché il significato attribuito di volta in volta ai pretesi costituenti ultimi è essenzialmente categoriale i nodi vennero al pettine quando invece di rivolgersi ad una tecnica "chiusa" come quella della chimica, che si occupa di composizioni e decomposizioni tra atomi senza spezzarli, si introdussero tecniche, per così dire di "rottura". Si è allora ammesso che si ottengono "particelle sub atomiche", ma visibili in modo indiretto, cioè interpretando *tracce* lasciate nella camera di Wilson od in quella a bolle. Si costruirono le particelle non tenendo sufficientemente da conto che si vedevano come cose fisiche le tracce e le particelle erano da ricondurre a categorie ad esse applicate.

Bisogna inoltre tenere presente che il "semplice" ed il "complesso" sono categorie mentali e quindi non poteva avere alcun esito la ricerca sperimentale di un "semplice" in assoluto, prescindente dal riferimento al procedimento di divisione impiegato. Inoltre il persistente errore filosofico del realismo fece si che a tali "particelle" o "corpuscoli" si attribuissero requisiti ritenuti intrinseci di tutte le cose reali, come la "massa", intesa come quantità di materia legata con il peso. Si dovette però ammettere che tali corpuscoli subatomici non potevano avere una massa nel senso tradizionale e perciò nei loro riguardi si parlò di una *massa elettromagnetica* invece che *gravitazionale*.

Si pervenne alla codificazione della nuova teoria atomica anche attraverso altre vie come lo studio dei fenomeni di elettrolisi e di quelli di conducibilità dei gas. Arrhenius trovò che con la dissociazione elettrolitica dei cosiddetti "elettroliti forti" gli atomi diventano *ioni*, cioè si caricano di elettricità. Tra l'altro si deduceva che si deve attribuire all'elettricità un carattere discontinuo a somiglianza della materia. L'*elettrone*, cioè l'unità di carica elettrica negativa fu trovato da Perrin. J. Thomson determinò la sua velocità ed il rapporto tra massa e carica. Si trovò dopo che la sua carica è quella dell'ione di idrogeno e si calcolò che ha una massa uguale a quella di 1/1845 dell'atomo di quest'elemento.

Nel 1911 Rutherford propose un modello della struttura dell'atomo simile a quello del sistema solare. Precisamente ipotezzò che si abbia un nucleo centrale con una carica positiva intorno al quale ruotano gli elettroni (cariche negative) in orbite circolari concentriche in modo da costituire un insieme neutro. Nell'atomo, come nel sistema solare, il volume del vuoto supera di gran lunga quello del pieno e si spiega così il fenomeno delle particelle che attraversano la materia ma possono anche essere deviate. Però secondo le leggi dell'elettrodinamica gli elettroni non potrebbero ruotare in modo stabile perché dovrebbero perdere energia. Bisognava perciò modificare il tradizionale concetto di carica elettrica, distinguendo quella in moto dentro l'atomo dalla esterna.

Il cosiddetto "atomo di Bohr" aggiunse al concetto degli elettroni che girano intorno al nucleo che essi emettono energia saltando in un'orbita più interna e la assorbono se invece in una più esterna. Ad ogni salto corrisponde una quantità fissa di energia valutabile in *quanti***,** introdotti da Planck indipendentemente per spiegare fenomeni di altro tipo, da essere concepiti come una sorta di atomi energetici. Sommerfeld modificò il modello di Bohr proponendo orbite ellittiche come quelle dei pianeti intorno al sole.

Per spiegare i fenomeni chimici si doveva ammettere che l'atomo abbia una massa, cioè introdurre nei suoi riguardi qualcosa di analogo a quella dei corpi macroscopici, corrispondente al peso determinato con la bilancia (massa in un campo gravitazionale). Essa fu attribuita al nucleo, considerato costituito da corpuscoli positivi aventi una massa, chiamati *protoni* e da altri senza carica, ma anch'essi con massa, chiamati *neutroni*. In quanto agli *elettroni* si disse che sono senza massa o meglio che ne hanno una elettromagnetica. In tal modo si proposero degli *adattamenti* più o meno forzati di categorie della tradizionale fisica macroscopica alla sfera atomica.Questo era certamente il modo più *comodo* di procedere, ma che diventava pericoloso se considerato invece come *necessario* perché imposto dall'esistenza di una "realtà" indipendente dall'uomo, costituita da "masse" e da"cariche".

La teoria atomica così impostata permetteva di spiegare alcuni concetti introdotti dai chimici, Il *numero atomico* si faceva corrispondere al numero di protoni nel nucleo atomico, carattererizzante le proprietà dell'atomo. Esso corrisponderebbe anche al *peso atomico* se non ci fossero i neutroni. Ricerche di Soddy e verifiche sperimentali da parte di Aston condussero alla scoperta degli *isotopi*, cioè elementi chimicamente uguali ma di peso diverso mescolati in natura e classificati nella stessa casella del sistema di Mendeleev.

La loro presenza spiegava perché il peso atomico dei vari elementi non è un multiplo esatto di quello del più semplice, cioè l'idrogeno, il cui nucleo è costituito da un solo protone. Esso ha per isotopo il *deuterio* (idrogeno pesante), scoperto da Chadwich, che ha la stessa carica, le stesse proprietà chimiche, ma un peso atomico maggiore perché il suo nucleo è costituito da un protone ed un neutrone.

Nell'atomo proposto da Bohr e Sommerfeld gli elettroni ruotano in strati indicati con le lettere K, L,M, N,O, P, Z. L 'idrogeno, che ha un solo elettrone ha solo strato K. Per ogni strato vi sono dei sottostrati. Fu enunciata la *teoria degli ottetti*, secondo la quale nello strato esterno di ogni atomo possono esserci fino ad otto elettroni. Questo è non solo il numero massimo possibile, ma anche quello che dà equilibrio al sistema. Perciò gli atomi tendono ad acquistare in questo strato tale numero di elettroni mediante combinazioni chimiche con altri. Quelli che hanno per loro costituzione già questo numero non si associano con altri, cioè sono chimicamente inattivi. Si tratta dei cosiddetti *gas rari* (elio, neon,ecc.). Invece gli elementi che nello strato esterno hanno solo sei elettroni tendono ad acquistarne altri due; se ne hanno tre tendono a perderli. In entrambi i casi si squilibrano elettricamente, diventando ioni negativi nel primo caso, positivi nel secondo. Gli atomi con un numero compreso tra 4 e 7 tendono ad acquistarne. Segue che i positivi ed i negativi si attraggono dando luogo ai composti chimici. Gli elettroni persi od acquistati per raggiungere il numero otto con la formazione dei composti vengono chiamati *elettroni di valenza*. Si spiega così il concetto chimico di valenza con cui sono legate le possibili combinazioni. Ad esempio, l'idrogeno è monovalente, l'ossigeno bivalente onde possono combinarsi due atomi di idrogeno con uno di ossigeno,dando luogo all'acqua. la cui formula è H_2O.

Sommerfeld introdusse un *numero quantico*, che misura l'eccentricità dell'ellisse. Un altro fu introdotto da Goudsmit ed Uhlernbeck, chiamato *spin* che fissa come gli elettroni ruotano intorno al loro asse. Furono proposti in tutto quattro numeri quantici. Secondo il *principio di esclusione di Paoli*, in ogni orbita vi è un solo elettrone caratterizzato dagli stessi numeri quantici.

Il persistente realismo di fondo sovrapponenrtesi agli sforzi di teorizzare i fenomeni sub-atomici ha condotto alla proposta di soluzioni che non possono non lasciare perplesso l'operazionista. Ad esempio,venne alla ribalta l'*onda-corpuscolo* di De Broglie e Schroedinger, secondo la quale le due categorie considerate tradizionalmente incompatibili, vengono fuse, Si disse precisamente che l'"onda" è una datità fisica continua, uniforme nello spazio, ma quando ve ne sono insieme molte e di diversa frequenza, la diffusione può risultare eterogenea ed in particolare possono prodursi delle concentrazioni ("pacchetti d'onda"). Il corpuscolo venne appunti raffigurato come un pacchetto di onde, attribuendogli una lunghezza d'onda proporzionale alla sua quantità di moto. Così tra l'altro si faceva provenire il "discontinuo" da una sorta di eterogeneità nel "continuo", ovviamente visti in senso realista come datità fisiche. Il *principio di indeterminazione di Heisenberg* scaturisce da questa contraddizione nel senso che in definitiva riconosce l'impossibilità di applicare insieme le categorie del discontinuo (corpuscolo) e del continuo (onda). Precisamente afferma che se un pacchetto d'onde viene determinato come punto di concentrazione, non si può misurare esattamente la sua velocità; viceversa se si misura la velocità, non è possibile determinare esattamente il suo punto di concentrazione. Invece di attribuire questa "indeterminazione" alla concomitante applicazione di due categorie che si escludono, si parlò di una artefazione della "realtà" da parte dell'osservatore. Bohr affermò che ad una "realtà" di per sé indifferenziata l'osservatore sovrappone le due concezioni *complementari* dell'onda e del corpuscolo, ma non nel senso operativo della categorizzazione di cose fisiche bensì in quello della necessità dialettica (si pensi ad Hegel) di dover procedere mediando i termini contraddittori nella costituzione di qualcosa d'altro.

La materia ricondotta ad onde venne caratterizzata da una frequenza " ν " e da una lunghezza d'onda "λ". Precisamente venne proposta una teoria corpuscolare delle radiazioni considerando quelle della luce costituite da *fotoni*, Furono proposte le definizioni:

$$E = h\,\nu \qquad\qquad p = h\ \ \lambda$$

ove "E" è l'energia ," p" l'impulso del fotone ed "h" la costante di Planck.

Schroedinger propose un'equazione che sta alla base della *meccanica ondulatoria*, che insieme con la *meccanica delle matrici* di Heisenberg, sfocia nella *meccanica quantistica*.

Dal punto di vista semantico le difficoltà in cui ci si è imbattuti probabilmente provengono dalla nozione di "particella". Essa proviene da "parte", categoria mentale con cui si contrassegna l'arresto di una suddivisione fisica. Essa è relativa alla tecnica adoperata, invece è stata assunta come una cosa fisica che si osserva e la cui "realtà" si manifesta in qualsiasi situazione comunque si proceda. Man mano che si ottenevano particelle con macchine acceleratrici sempre più potenti (cosmotrone,bevatrone,ecc.) si si ebbero nuovi prodotti per i quali tuttavia si volevano conservare alcuna caratteristiche ritenute standard delle particelle. Ad un certo punto si pervenne alla conclusione che esistono solo dodici tra "particelle" ed" antiparticelle" classificate in pesanti (*barioni*), medie (*mesoni)* e leggere (*leptoni*) collegatte con tre processi da essere considerati fondamentali. Essi erano:

a) l'interazione forte di Yukava con cui si spiegava la stabilità dei nuclei atomici;

b) quella elettromagnertica di Dirac per spiegare la formazione degli atomi e delle molecole;

c) quella debole di Fermi per spiegare la decomposizione degli atomi.

Tutte le particelle dovevano ubbidire inoltre alle leggi di conservazione dell'energia, del momento e della carica.

Questa soluzione ben presto si mostrò insostenibile. Secondo la teoria di Yukava si deve ritenere che come nel campo elettromagnetico l'elettrone sia circondato da fotoni virtuali così nel campo nucleare, per la trasmissione delle azioni *forti* deve intervenire una particella con specifiche caratteristiche, che fu identificata con il mesone π (*pione*), trovato nei raggi cosmici. Ma insieme con esso fu trovato anche un altro mesone, che si ritenne proveniente insieme con un *neutrino*, dalla decomposizione del primo e perciò fu considerato secondario. Si trattava però di una particella non prevista dalla classificazione. Ad essa fece seguito tutta una serie di ulteriori particelle anch'esse non previste, che furono perciò chiamate *particelle strane*. Nel 1961 si era passati dalle 12 a 30 particelle, nel 1969 si arrivò a 288. Per uscire in qualche modo dalla difficoltà, determinando delle invarianze e quindi delle leggi di conservazione, ci si adattò addirittura ad assumere come criterio definitorio la deviazione dal paradigma, considerandola come una sorta di causa negativa. Si propose in questo senso una *legge di conservazione della stranezza*. Risultò però (esperienza di Yang e Lee) che nel campo delle interazioni deboli veniva violato il cosiddetto *principio della parità,*cioè la legge di conservazione della simmetria destra-sinistra nella riflessione speculare. Si poteva continuare ad invocare tale simmetria solo ammettendo la conversione della *materia* in una simmetrica *antimateria*, Ai fisici sembrò che vacillassero i fondamenti della loro scienza.

Si tentò di superare la difficoltà proponendo altre particelle da essere considerate come i "veri" costituenti della "realtà", dalla cui combinazione nascessero tutte le altre. M. Gell Mann tentò appunto di fissare un ordine delle particelle elementari categorizzando i loro sistemi come *invarianti* per un certo numero di trasformazioni. Esse sarebbero da ricondurre a gruppi di otto e tutte costituite da tre fondamentali, chiamate scherzosamente *quark*, parola irlandese usata da Joyce. Ma nasceva la nuova difficoltà che un aggregato di quark darebbe luogo a particelle con masse più piccole dei costituenti e che stranamente questi dovrebbero essere più complessi dei composti. Particelle da essere considerate come composte da altre contemporaneamente dovevano essere ritenute loro costituenti, secondo un meccanismo che fu chiamato scherzosamente "bootstrap", abbreviazione di " to lift oneself up by one's own bootstrap", cioè "sollevarsi tirando la stringa delle proprie scarpe". A questo punto cominciò a farsi strada il concetto che a nessuna particella si possa attribuire per la sua pretesa natura reale di essere più elementare delle altre.

Il fatto è che non ci si rese conto che la maggiore o minore semplicità è una categorizzazione è non già una proprietà fisica da trovare con l'osservazione. La"particella" non deve essere considerata come una sorta di "essere" eleatico, che non può nascere o morire, attribuito già dai fisici greci a quelli da essere considerati , a loro avviso, costituenti ultimi del mondo fisico. Le categorizzazioni hanno una funzione esplicativa e preferirne una ad altre dipende solo dalla sua efficienza. Più categorizzazioni possono essere sovrapposte purché non siano contraddittorie. Altrimenti la contraddizione genera altre contraddizioni come è avvenuto con le teorie di cui abbiamo fatto cenno.

Giuseppe Vaccarino